CAPÍTULO I : CONCEPTOS FUNDAMENTALES

1.1 *La igualdad entre números reales* .

Usamos números reales todos los días para describir cantidades, por ejemplo : precios , descuentos , distancia, volumen, la hora del día, etc. Para representar números reales usamos ***símbolos*** tales como

$$0 \;,\quad -5 \;,\quad \pi \;,\quad \frac{4}{3} \;,\quad 23.77777 \;,\quad \sqrt{2} \;,\quad -32^{\left(\frac{2}{3}\right)} \;,\quad log_2\cdot(13) \qquad \text{etc.}$$

También podemos usar un símbolo literal (una o más letras) para representar el valor de algún número real, por ejemplo x , y , a , s , t etc.
Si la literal puede tomar más de un valor numérico la llamaremos ***variable*** ; pero si toma un sólo valor, se llamará ***constante*** .

Se define la igualdad entre dos números reales A y B como una proposición de que ambos representan el mismo valor numérico y se denota por el símbolo : $A = B$. que se lee " *A es igual a B* " . Los números A y B se llaman *primero y segundo miembros de la igualdad* respectivamente .

Por ejemplo, ya que $(7-3)$ y $(10-6)$ representan ambos el número 4 , escribimos : $7-3 = 10-6$

Una ***igualdad absoluta*** , *se cumple para cualquier valor que representen* A *y* B *y se llama* ***identidad***

Una ***igualdad condicional*** , *se cumple sólo para ciertos valores de* A *y* B *y se llama* ***ecuación***

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

PROPIEDAD	*SIGNIFICADO*	*REPRESENTACIÓN*
I ***Reflexiva***	*Todo número real es igual a sí mismo*	$A = A$
II ***Simétrica.***	*Si el número* A *es igual al número* B, *entonces también es cierto que* B *es igual al número* A	$A = B \quad \to \quad B = A$
III ***Transitiva.***	*Si dos números son iguales a un tercero, entonces son iguales entre si*	$A = B$ y $B = C \;\to\; A = B$
IV ***Substitución***	*Si* $A = B$ *, entonces el número* A *puede ser reemplazado por* B *en* ***cualquier*** *proposición que involucre al número* A	

Una consecuencia importante de la propiedad de substitución es que nos permite

Sumar la misma cantidad (cualquiera que ésta sea) o multiplicar por la misma cantidad (cualquiera que ése sea excepto el cero) a los dos miembros de una igualdad , sin que ésta pierda su validez o altere su valor .

Las siguientes reglas son una consecuencia de éstas cuatro propiedades fundamentales de la igualdad.

REGLA	SIGNIFICADO
I *Aditiva*	Si $A = B$, entonces $A + C = B + C$ o también $A - C = B - C$
II *Multiplicativa.*	Si $A = B$, entonces $A \cdot C = B \cdot C$ o también $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$ para $C \neq 0$.

Las inversas de éstas reglas son :

III *Cancelación aditiva*	Si $A + C = B + C$ o $A - C = B - C$ entonces $A = B$
IV *Cancelación del producto*	Si $A \cdot C = B \cdot C$ o $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$ entonces $A = B$

DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA ADITIVA :

Supongamos que A , B *y* C *son números reales y que* $A = B$ *, entonces* . . .

$A + C$ *es un número real (la suma de dos números reales es otro número real)*

$A + C = A + C$ *todo número real es igual a sí mismo (propiedad reflexiva de la igualdad)*

$A + C = B + C$ *puesto que* A *y* B *son iguales, se ha substituido* A *por* B *en el 2° miembro*

DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA MULTIPLICATIVA :

$A \cdot C$ *es un número real (el producto de dos números reales es otro número real)*

$A \cdot C = A \cdot C$ *todo número real es igual a sí mismo (propiedad reflexiva de la igualdad)*

$A \cdot C = B \cdot C$ *puesto que* A *y* B *son iguales, se ha substituido* A *por* B *en el 2° miembro*

1.2 Operaciones fundamentales con los números reales.

El conjunto de números reales *se construye con la unión de los siguientes subconjuntos* de números :

Naturales : $\mathbf{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \ldots .\infty \}$

Enteros : $\mathbf{Z} = \{-\infty \ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \infty \}$

Racionales : $\mathbf{Q} = \{ m \div n \mid m, n \in \mathbf{Z} \}$
(Todos los números que se expresan como el cociente de dos números enteros m y n con $n \neq 0$.)

Irracionales: $\mathbf{I}$ = { Todos los números que no son racionales }.

donde el símbolo: ∞ (infinito) denota una cantidad mayor que cualquier número por grande que éste sea .

Existen también *cuatro operaciones binarias fundamentales* entre dos números reales A y B :

NOMBRE	SÍMBOLO(S)	COMPONENTES
I. adición o suma :	$A + B$	A y B se llaman sumandos
II. multiplicación o producto :	$A \cdot B$, $A \times B$, $(A) \cdot (B)$	A y B se llaman factores
III. substracción , diferencia o resta:	$A - B$	A se llama minuendo y B sustraendo
IV. división o cociente :	$A \div B$, A / B, $\dfrac{A}{B}$	A se llama dividendo o numerador y B se llama divisor o denominador

donde se define. . .

- ***La multiplicación como una suma abreviada*** , es decir si el mismo número A se suma B veces:

$$(A + A + A + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + A)$$

el resultado de la suma es el número $A \cdot B$.

Por ejemplo : $(5) \cdot (3) = 5 + 5 + 5 = 15$ es igual a tres veces cinco o también . . .
$= 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$ es cinco veces tres.

(esta idea se extiende aún en el caso de que B no sea un número entero)

- ***La resta como la operación inversa de la suma*** , es decir si B es el número que sumado con A es igual al número C :

$$A + B = C$$

entonces C es también el número que al disminuirse en la cantidad B, da como resultado el número inicial A .

$$C - B = A$$

Por ejemplo : Si $3 + 8 = 11$, entonces $11 - 8 = 3$.

- ***La división como la operación inversa de la multiplicación*** , es decir si B es el número que multiplicado por A da C

$$A \cdot B = C$$

entonces C es el número que dividido en B partes iguales genera el número A de partes iguales, es decir . . .

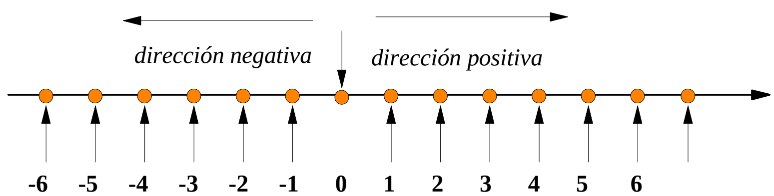
$$A = \frac{C}{B}$$

Por ejemplo : Si $(7)\cdot(6) = 42$, entonces: $\frac{42}{6} = 7$, el 42 se divide en 7 partes iguales de tamaño 6

Con excepción de la división por cero , ***todas estas operaciones están definidas para cualquier par de números reales*** .

1.3 ***La recta numérica .***

Una línea horizontal con un punto escogido arbitrariamente como el ***origen*** para representar al número 0 (cero), sirve para representar y ordenar a los números reales.
Los números positivos se colocan a la derecha del origen a una distancia proporcional a su valor y quedan ordenados así en orden creciente.
Los números negativos se colocan a la izquierda del origen a una distancia proporcional a su valor absoluto y quedan ordenados así en orden decreciente.
En otras palabras, *la distancia desde el cero (el origen) hasta cualquier punto de la recta, es igual al valor absoluto del número real que representa ese punto*. Si tal distancia se mide hacia la derecha, el número es positivo, si se mide hacia la izquierda, entonces el número es negativo.



Nótese que aunque solo se han representado los puntos correspondientes a números enteros, entre cada par de puntos consecutivos existe una infinidad de puntos de la recta, es decir, entre cada par de enteros consecutivos existe también una infinidad de números reales

De éste modo :

1. ***Cada punto sobre la recta representa un número real único .***
2. ***Cada número real corresponde a un punto único sobre la recta .***
3. ***Quedan ordenados todos los números reales de menor a mayor, de izquierda a derecha*** .

Si un número real x es positivo, significa que se localiza sobre la recta numérica a la derecha del origen, lo cual se denota por el símbolo: $x > 0$.

Si el número z es negativo, significa que está a la izquierda del origen, lo cual se denota por : $z < 0$.

De manera general, si el número x está a la izquierda del número y sobre la recta numérica ,entonces se dice que x *es menor que* y , lo cual se escribe como: $x < y$

En los siguientes esquemas las distancias OA y OB sobre la recta numérica real representa los números x e y respectivamente. Además el número $-y$ corresponde a una distancia igual a OB pero medida en sentido negativo.

Nótese que la diferencia $(x-y) = OA - OB$ es igual a la distancia $OA + AP$ donde AP es igual a la distancia OB pero medida a partir del punto A y en sentido opuesto a OB.

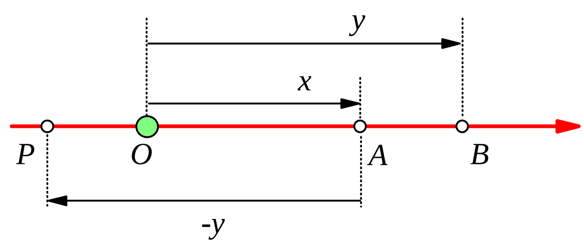
De éste modo, los posibles casos para los que se cumple la desigualdad $x < y$ (cuando x está a la izquierda de y) son :

CASO I :

ambos números son positivos : $x > 0$; $y > 0$.

Dado que y es positivo, el número $-y$ se mide *hacia la izquierda* a partir del punto A .

La distancia $OA + AP$ que representa al número $(x-y)$ queda entonces *a la izquierda del origen (porque* OA *es* <u>*menor*</u> *que la distancia* AP *)*

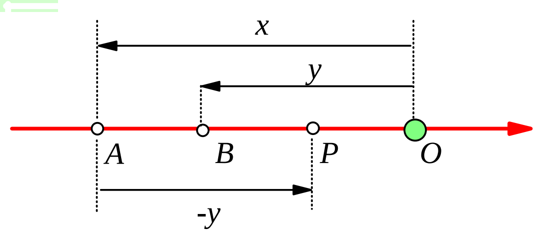


CASO II :

ambos números son negativos : $x < 0$; $y < 0$.

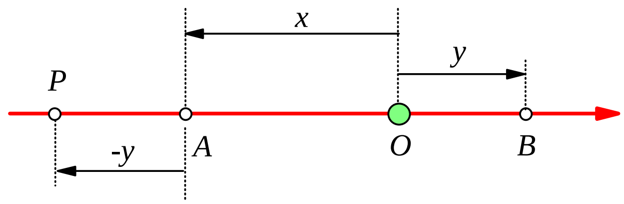
Dado que y es negativo, el número $-y$ se mide *hacia la derecha* a partir del punto A .

La distancia $OA + AP$ que representa al número $(x-y)$ queda así *a la izquierda del origen (porque* OA *es* <u>*mayor*</u> *que la distancia* AP *)*



CASO III :
el número x es negativo $(x < 0)$ y el número y es positivo $(y > 0)$.

Dado que y es positivo, el número $-y$ se mide *hacia la izquierda* a partir del punto A y la distancia $OA + AP$ que representa al número $(x - y)$ queda también en este caso *a la izquierda del origen.*



Se puede afirmar por lo tanto que . . .

Si $x < y$ ***entonces*** $x - y$ ***es un número negativo***

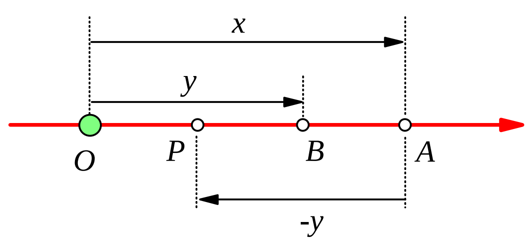
Si $x - y$ ***es un número negativo entonces*** $x < y$

Por otra parte, cuando el número x queda a la derecha del número y sobre la recta numérica, se dice que x *es mayor que* y , lo cual se denota como $x > y$

Usando un razonamiento semejante al anterior, se representan ahora sobre la recta numérica real los posibles casos para los que se cumple la desigualdad $x > y$ (cuando x está a la derecha de y)

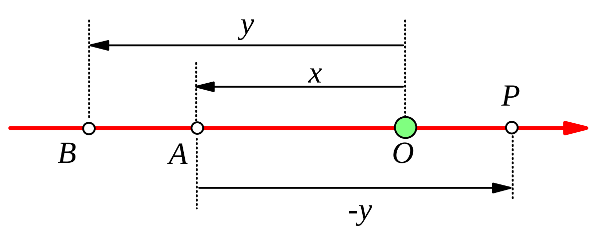
CASO I :
ambos números son positivos $x > 0$; $y > 0$.

Dado que y es positivo, el número $-y$ se mide *hacia la izquierda* a partir del punto A .
La distancia $OA + AP$ que representa al número $(x - y)$ queda entonces *a la derecha del origen (la distancia OA es <u>mayor</u> que la distancia AP)*



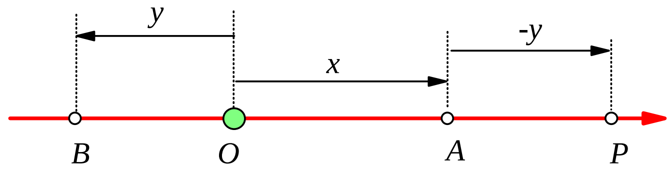
CASO II :
ambos números son negativos $x < 0$; $y < 0$.

Dado que y es negativo, el número $-y$ se mide *hacia la derecha* a partir del punto A
La distancia $OA + AP$ que representa al número $(x - y)$ queda entonces *a la derecha del origen (la distancia OA es <u>menor</u> que la distancia AP)*



CASO III :
el número x es positivo $(x > 0)$ y el número y es negativo $(y < 0)$.

Dado que y es negativo el número $-y$ se mide *hacia la derecha* a partir del punto A y la distancia $OA + AP$ que representa al número $(x - y)$ queda también en este caso *a la derecha del origen.*



Se puede afirmar por lo tanto que . . .

Si $x > y$ entonces $x - y$ es un número positivo
Si $x - y$ es un número positivo entonces $x > y$

Los símbolos " < " y " > " se llaman ***de desigualdad*** y a veces se combinan con uno de igualdad " = " como sigue :

$a \le b$ que se lee: " *El número* a *es menor o igual que el número* b "

$a \ge b$ que se lee: " *El número* a *es mayor o igual que el número* b "

Las desigualdades se usan para denotar subconjuntos de números reales, es decir *intervalos o partes de la recta numérica* .
Por ejemplo:

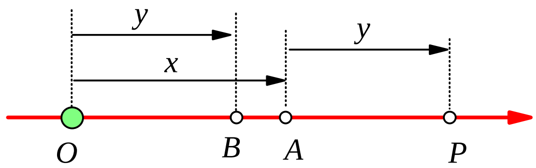
Desigualdad	*Subconjunto correspondiente de números reales* :
$x < 2$	Todos los puntos x de la recta numérica que están a la izquierda del número 2
$-2 < y < 3$	Los puntos y de la recta numérica comprendidos entre -2 y 3
$z > -5$	Todos los puntos z sobre la recta que quedan a la derecha del número -5

1.4 Regla de los signos para la suma.

Dado que un número real representa una distancia medida sobre la recta numérica, es evidente la siguiente convención:

- ***Una distancia x medida hacia la izquierda representa un número negativo de valor $-x$.***
- ***Una distancia x que se mida hacia la derecha representa un número positivo de valor x***

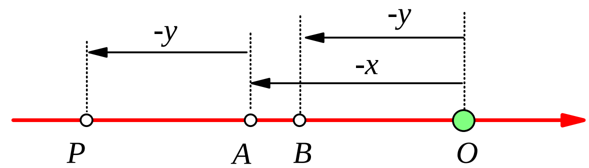
Si x e y son dos números *con el mismo signo*, significa que *se miden en la misma dirección sobre la recta numérica* y por lo tanto $(x + y)$ es la unión de sus distancias, ya sea ambas hacia la derecha , o ambas hacia la izquierda



Suma de dos números positivos $x > 0, \; y > 0$

La suma de las distancias OA *y* $OB = AP$ *genera un punto* P *a la derecha del origen, por eso la suma* $x + y$ *de dos números positivos es siempre positiva:*

$$[\, OA + OB = OA + AP = (x + y) > 0 \,]$$

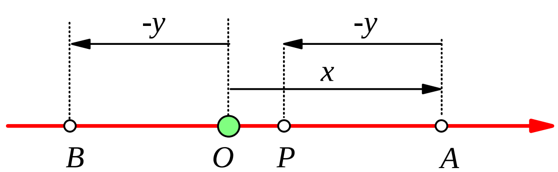


Suma de dos números negativos $x < 0, \; y < 0$

La suma de las distancias OA *y* $OB = AP$ *genera un punto* P *a la izquierda del origen, por eso la suma* $x + y$ *de dos números negativos es siempre negativa:*

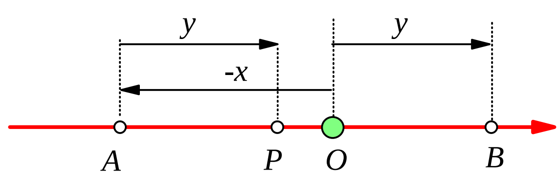
$$[\, OA + AP = -x - y = -(x + y) < 0 \,]$$

Cuando se suman dos números reales de distinto signo, significa que se miden en direcciones opuestas a partir del origen sobre la recta numérica , y por lo tanto la distancia más grande (OA o OB) determinará si la suma entre ellas es positiva o negativa .



Suma de $x > 0$ *e* $y < 0$

Si la distancia OA *que representa al número* x *es mayor que la distancia* OB *que representa al número* $-y$ *, entonces el punto* P *quedará a la derecha del origen y la suma* $(x + y)$ *representará a un número positivo ; en caso contrario, es decir si* $OA < OB$ *entonces el punto* P *quedara a la izquierda del origen y la suma* $(x + y)$ *será negativa*



Suma de $x < 0$ *e* $y > 0$

Si la distancia OA *que representa al número* $-x$ *es mayor que la distancia* OB *que representa al número* y *entonces el punto* P *quedará a la izquierda del origen y la suma* $(x + y)$ *representará a un número negativo; en caso contrario, es decir si* $OA < OB$ *entonces el punto* P *quedara a la derecha del origen y la suma* $(x + y)$ *será positiva.*

Con base en el anterior análisis, ahora podemos enunciar las reglas para sumar algebraicamente dos números reales :

Regla para la suma de dos números reales que . . .

tienen el mismo signo :	***tienen signos opuestos :***
Sumar los valores positivos de los números y preceder el resultado de su signo común	***Hallar la diferencia de los valores positivos de los números y anteponer al resultado el signo del número que representa la mayor distancia***

Ejemplo 1 :

- $3+(-5)$

  Tienen signos opuestos y su diferencia es 2, así que se debe anteponer a este resultado el signo (−) del número correspondiente a la mayor distancia (el 5), para obtener: $3+(-5)=-2$.

- $(-8)+(-7)$

  Tienen el mismo signo, y su suma es 15, así que hay que anteponer a este resultado el signo (−) común de ambos números para obtener: $(-8)+(-7) = -15$.

- $(-9)+12$

  Tienen signos opuestos, su diferencia es 3. Se debe preceder este resultado por el signo (+) del número correspondiente a la mayor distancia (el 12) para obtener: $(-9)+12 = 3$

  (*Generalmente, el signo positivo al inicio de una expresión es implícito y no se escribe , por eso escribimos* 3 *y no* $+3$ *;* 17 *y no* $+17$)

1.5 Construcción y propiedades de los números reales .

El conjunto de números reales es cerrado bajo las cuatro operaciones fundamentales, es decir, la suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos números reales, da como resultado un número que también es real .

- ***Definición de cerradura :*** *Un conjunto dado es cerrado bajo cierta operación, si al aplicar tal operación a un par de elementos del conjunto se obtiene como resultado otro elemento que también pertenece al conjunto.*

El conjunto $\mathbf{N} = \{\, 1, 2, 3, \ldots \,\}$ de los ***números naturales***, es evidentemente cerrado para la suma y la multiplicación . (*sume o multiplique cualquier par de números naturales y obtendrá de nuevo un número natural*), por ejemplo $2+3=5$ o $(2)\cdot(3)=6$.

Sin embargo, la diferencia de dos números naturales puede que no sea ya un numero natural, por ejemplo : $2-3=-1$ pero el número -1 no está en el conjunto de números naturales $\mathbf{N}$ sino en el de los enteros $\mathbf{Z}$.

Por otra parte, la división de dos números naturales: $\left(\dfrac{n}{m}\right)$ definitivamente no es un número natural salvo en los casos muy especiales cuando $m=1$ o cuando el número n es un múltiplo entero de m .

En resumen, *el conjunto de números naturales no es cerrado bajo la resta o la división .*

En cambio, el conjunto de ***números enteros :*** $\mathbf{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ si es un conjunto cerrado para la suma, la multiplicación y la resta (*sume, reste o multiplique cualquier par de números enteros y obtendrá como resultado un número que también es entero*) , por ejemplo . . .

$$(-4) + 2 = -2 \quad , \qquad (-4)\cdot 2 = -8 \ , \quad (-4) - (2) = -6$$

Sin embargo, en este conjunto no hay cerradura para la división (*el cociente de dos números enteros puede que no sea ya un numero entero*) por ejemplo $\frac{3}{5}$ no es un número entero y no está en el conjunto $\mathbf{Z}$, a menos que el divisor sea el número uno.

En resumen : *el conjunto de números enteros no es cerrado bajo la división*

Añadir al conjunto $\mathbf{Z}$ todos aquellos números que resulten de la división de dos enteros y cuyo divisor no sea 0 ni 1 es decir, añadiéndo *las fracciones*, el conjunto $\mathbf{Z}$ se convierte en un conjunto *cerrado bajo las cuatro operaciones elementales* que se llama conjunto de ***números racionales:*** $\mathbf{Q}$.
Bajo cualquiera de las cuatro operaciones fundamentales entre dos números racionales, se obtendrá como resultado otro número que también es racional, por ejemplo :

$$\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) = 1 \quad ; \qquad \left(\frac{3}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \quad ; \qquad \left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} \quad ; \qquad \frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{1}$$

Se define así el conjunto $\mathbf{Q}$ de números racionales como :

$$\boxed{Q = \{\, x \mid x = \frac{n}{m} \ \text{donde} \ n \in \mathbf{Z} \, , \ m \in \mathbf{Z} \ \text{con} \ m \neq 0 \,\}}$$

Sin embargo, *existen algunos números no se pueden escribir como la razón o cociente de dos números enteros* . A éste tipo de números, para distinguirlos de los números racionales, se les llama conjunto de ***números irracionales*** $\mathbf{I}$ y generalmente se obtienen mediante la 5ª operación matemática: *las raíces.*

Así por ejemplo, son números irracionales la mayoría de las raíces pares o impares de números enteros:

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095.... \qquad ; \qquad \sqrt{7} = 2.645751311064591.....$$

$$\sqrt[3]{3} = 1.44224957030741.... \qquad ; \qquad \sqrt[4]{8} = 1.68179283050743.....$$

donde los puntos suspensivos indican que hay una serie infinita de decimales.

Se puede demostrar analíticamente que ***todo número irracional no es el cociente de dos enteros.***

Ejemplo 2 . Demostrar que $\sqrt{2}$ no es un número racional .

Solución :

- Supongamos lo contrario, es decir que $\sqrt{2}$ es racional y si llegamos a una conclusión absurda, significará que ésta suposición fué falsa y por lo tanto la suposición opuesta (*que* $\sqrt{2}$ *es irracional*) será verdadera. Propongamos entonces que $\sqrt{2}$ se puede escribir como el cociente de dos números enteros a y b *que no tienen factores en común* , es decir que la fracción $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ *está reducida a su mínima expresión* .
- Elevando al cuadrado la fracción anterior se obtiene que $2 \cdot b^2 = a^2$, es decir a^2 es un múltiplo de 2 y por lo tanto a *es un entero par* , puesto que el cuadrado de todo número par es par también. Cualquier entero par se puede escribir en la forma $2 \cdot n$, donde n representa otro número entero, entonces , con $2 \cdot n = a$ queda . . .

$$2 \cdot b^2 = (2 \cdot n)^2$$

- Se deduce ahora que $b^2 = 2 \cdot n^2$, es decir que b^2 es un múltiplo de dos y por lo tanto también el número b *es un entero par* . Luego a y b son ambos pares, *lo cual contradice la suposición inicial de que éstos dos números no tenían factores en común* . En conclusión, la hipótesis inicial es falsa y por lo tanto $\sqrt{2}$ no se puede escribir como el cociente de dos números enteros, luego es irracional.

Cuando un número irracional se representa en forma decimal, como en los ejemplos anteriores, resulta que *su parte decimal es infinita y no presenta ningún patrón de repetición*.
Este comportamiento es opuesto al de los números racionales, para los cuales *la parte decimal siempre termina o bien presenta un patrón de repetición infinito* , por ejemplo:

$\frac{8}{5} = 1.6$ tiene parte decimal finita y una sola cifra decimal.

$\frac{19}{8} = 2.375$ tiene parte decimal finita y 3 cifras decimales.

$\frac{7}{3} = 2.3333333........$ tiene parte decimal infinita y un patrón de repetición de una cifra, el 3.

$\frac{1}{7} = 0.1428571428....$ parte decimal infinita y un patrón de repetición de 6 cifras: 142857

Por otra parte, en los números irracionales *no se observa este comportamiento*

$\sqrt{24} = 4.898979485566356......$; $\sqrt[3]{13} = 2.35133468772076.......$

$\pi = 3.14159265358979........$; $e = 2.71828182845905..........$

Es posible *transformar los números decimales que representan racionales, en su forma fraccional equivalente* mediante el siguiente procedimiento :

1. *Representar por x el número decimal dado.*
2. *Multiplicar x por la potencia de 10 necesaria para que el patrón de repetición comience el la 1ª cifra decimal (ya sea el decimal finito o infinito).*
3. *Multiplicar el número anterior por 10^n , donde n es igual al número de cifras que tiene el patrón de repetición.*
4. *Restar el resultado del paso 2 del resultado del paso 3 .*
5. *Resolver la ecuación resultante para x y simplificar. Esa será la fracción racional correspondiente al número decimal .*

Ejemplo 3 . Convertir el número decimal periódico infinito $1.8585858...$ en una fracción equivalente.

Solución :

1. Denotemos este número racional como $x = 1.8585858......$
2. El patrón de repetición comienza ya en la 1ª cifra decimal así que no es necesario multiplicar por ninguna potencia de 10 .
3. Notemos que el patrón de repetición: 85, tiene dos cifras, así que multipliquemos ambos lados de la ecuación por $10^2 = 100$:

$$100 \cdot x = 185.8585858........$$

4. Ahora restemos a esta igualdad el valor x :

$$100 \cdot x = 185.8585858........$$
$$-x = -1.8585858..........$$

resultando: $99 \cdot x = 184$

5. Resolviendo esta ecuación para x, se obtiene. . . $x = \dfrac{184}{99}$

Ejemplo 4 . Convertir el número decimal periódico infinito $6.37142857142857...$ en una fracción equivalente.

Solución :

1. Denotemos este número racional como $y = 6.37142857142857..........$
2. El patrón de repetición comienza en la 2ª cifra decimal así que multipliquemos la ecuación anterior por $10^1 = 10$, obteniéndose : $10 \cdot y = 63.7142857142857..........$
3. Notemos que el patrón de repetición es 714285 y tiene seis cifras, así que multipliquemos ambos lados de la ecuación anterior por $10^6 = 1000000$:

$$\left(10^6\right)\cdot(10\cdot y) = 63714285.714285714.........$$

4. Ahora restemos la ecuación del paso 2 : $\left(10^6\right)\cdot(10)\cdot y = 63714285.714285714.........$

$$-(10)\cdot y = -63.7142857142857.........$$

resultando: $9999990\cdot y = 63714222$

5. Resolviendo esta ecuación para y, se obtiene : $y = \dfrac{63714222}{9999990}$

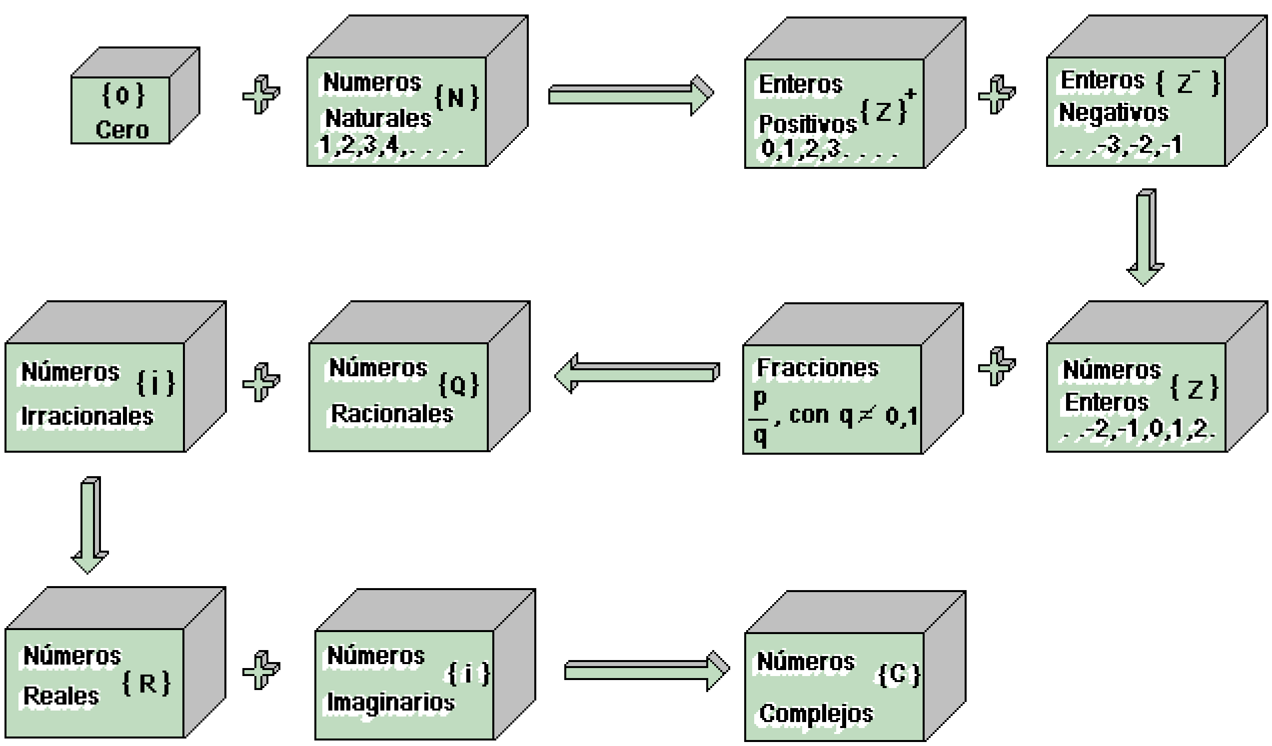
   Fracción que una vez simplificada : $y = \dfrac{223}{35}$ es el número racional buscado .

Al unir el conjunto de números racionales **{ Q }** con el conjunto de números irracionales **{ I }** , se obtiene el ***conjunto de los números reales***: **{ R }** = **{ Q }** + **{ I }** el cual, como consecuencia de la cerradura en **{ Q }** y en **{ I }** , es también cerrado bajo las cuatro operaciones elementales y la radicación.

Ahora bien, todo número real x tiene la propiedad de que *al elevarse al cuadrado se obtiene un número positivo* ($x^2 > 0$) . Si se agrega ahora al conjunto **{ R }** todos aquellos números que tengan la propiedad opuesta, es decir *aquéllos números cuyo cuadrado sea un número negativo,* los llamados *números imaginarios* **{ i }** , se obtendrá el ***conjunto de números complejos*** **{ C }** , esto es

{ C } = **{ R }** + **{ i }**

En resumen, los números complejos se forman con la unión de subconjuntos de números que tienen una nueva propiedad de acuerdo al esquema siguiente:



La siguiente lista resume las propiedades fundamentales de los números reales bajo la suma y el producto

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Si a, b, c representan números reales, entonces . . .

	PROPIEDAD	EN LA SUMA	EN LA MULTIPLICACION
I	***Cerradura***	La suma de dos números reales : $(a + b)$ *es otro número real*	El producto de dos números reales : $(a)(b)$ *es otro número real*
II	***Conmutativa***	*El orden de los sumandos no altera la suma* $(a + b) = (b + a)$	*El orden de los factores no altera el producto* $ab = ba$
III	***Asociativa***	*El resultado de una suma no depende del orden en que se realice* $(a + b) + c = a + (b + c)$	*El resultado de un producto no depende del orden en que se realice* $(ab)c = a(bc)$
IV	***Identidad***	*0* (*el cero*) es el elemento identidad para la suma porque $(0 + a) = (a + 0) = a$ para *cualquier número a*	1 (*el uno*) es el elemento identidad para la multiplicación porque $(1)a = a(1) = a$ para *cualquier número a*
V	***Inverso***	Todo número real a tiene un inverso aditivo denotado por : $-a$ tal que sumado con a : $a + (-a) = 0$ genera el elemento identidad para la suma .	Todo número real a (***distinto de cero***) tiene un inverso multiplicativo denotado por : $\frac{1}{a}$ ó por a^{-1} tal que multiplicado por a : $a\cdot\left(\frac{1}{a}\right) = \left(a\cdot a^{-1}\right) = 1$ genera el elemento identidad para el producto
VI	***Distributiva***	La suma se distribuye en el producto : $(a + b)c = ac + bc$	El producto se distribuye en la suma : $a(b + c) = ab + ac$

OBSERVACIÓN : No confundir el inverso aditivo de un número con un número negativo. Si un número b es ya negativo, entonces su inverso aditivo $-b$ es positivo. Por ejemplo si $b = -2$ entonces su inverso aditivo es $-b = -(-2) = 2$

Ejemplo 5 . Identificar la propiedad de los números reales ilustrada en las siguientes ecuaciones :

a) $5 + 4 = 4 + 5$

b) $(3 + 7)\cdot 2 = (3)\cdot(2) + (7)\cdot(2)$

c) $4\cdot x\cdot\left(\frac{1}{4\cdot x}\right) = 1$ con $x \neq 0$

d) $(x + 6) + 8 = x + (6 + 8)$

e) $4\cdot a + (-4\cdot a) = 0$

f) $(3\cdot x)\cdot(2\cdot y) = (2\cdot y)\cdot(3\cdot x)$

Solución :

a) Propiedad conmutativa de la suma.

b) Propiedad distributiva

c) Inverso multiplicativo.

d) Propiedad asociativa de la suma.

e) Inverso aditivo

f) Propiedad conmutativa del producto

1.6 *Propiedades del cero .*

El cero es un número real especial, porque es el único que no tiene inverso multiplicativo. Tampoco tiene signo por ser el límite entre los números positivos y los negativos.
Posee aspectos notables cuyo olvido es una fuente importante de errores algebraicos. Todo estudiante de álgebra debería recordar las siguientes propiedades :

PROPIEDADES DEL CERO .

C1 :	$A + 0 = A$	*El cero es el elemento identidad para la suma .*
C2 :	$A \cdot 0 = 0$	*El producto de cualquier número real* A *con cero es cero .*
C3 :	$\dfrac{0}{A} = 0$	*El cociente de cero con cualquier número* $A \neq 0$ *es cero .*
C4 :	$\dfrac{A}{0}$	*Para* $A \neq 0$ *, la división por cero no está definida*
C5 :	$A \cdot B = 0$	*Si el producto de dos números reales es cero entonces* $A = 0$ *o* $B = 0$

Con frecuencia, usamos ésta última propiedad para *determinar las raíces de una ecuación*

Olvidar que la división por cero no está definida (es decir, que el 0 no tiene inverso multiplicativo), puede darnos una desagradable sorpresa como en la siguiente "comedia" donde se "demuestra" que $2 = 3$

$a = b$ Partimos del supuesto de que dos números reales diferentes de cero $a \neq 0$ y $b \neq 0$, son iguales .

$a \cdot b^2 = b \cdot b^2$ Multiplicando por b^2 . (*Una igualdad no se altera si sus dos miembros se multiplican por la misma cantidad*)

$a \cdot b^2 - a^3 = b \cdot b^2 - a^3$ Sumando el número $-a^3$. (*Una igualdad no cambia si se suma en ambos miembros la misma cantidad*)

$a \cdot \left(b^2 - a^2\right) = b^3 - a^3$ Factorizando ahora usando las fórmulas del álgebra elemental para una diferencia de cubos y una diferencia de cuadrados se obtiene:

$$a \cdot (b - a) \cdot (b + a) = (b - a) \cdot \left(b^2 + a \cdot b + a^2\right)$$

Multiplicando ambos miembros por el inverso de $(b - a)$ queda :

$$\frac{a(b+a)\cdot(b-a)}{b-a} = \frac{(b-a)\cdot\left(b^2+a\cdot b+a^2\right)}{b-a}$$

$$a\cdot(b+a) = b^2 + a\cdot b + a^2$$ Simplificando

$$a\cdot(a+a) = a^2 + a\cdot a + a^2$$ dado que $a = b$ como se supuso inicialmente

$$2\cdot a^2 = 3\cdot a^2$$

$$2 = 3$$ Dividiendo por a^2 los miembros de la ecuación

Se ha "demostrado" así que $2 = 3$.
¡ Pero todos sabemos que $2 \neq 3$!! . ¿En donde está el error en el procedimiento anterior ? .

Un lector atento habrá notado que el paso de la división por $(b-a)$ está prohibido puesto que implica una división por cero al ser $b = a$.

1.7 ***La división y la substracción de números reales interpretadas como un producto y una suma .***

Las propiedades de los números reales no se enuncian para la resta y la división porque , basándonos en la propiedad de inverso, ésas operaciones quedan definidas en realidad como una suma y un producto como sigue :

Sean A, B y C números reales, con $B \neq 0$ tales que $A\cdot B = C$. Se sigue entonces que . . .

(*) $$A = \frac{C}{B}$$ (*por ser la división la operación inversa de la multiplicación*)

$$A\cdot B\cdot\left(\frac{1}{B}\right) = C\cdot\left(\frac{1}{B}\right)$$ (*regla de multiplicación para una igualdad*)

$$A\cdot(1) = C\cdot\left(\frac{1}{B}\right)$$ (*propiedad de inverso multiplicativo de los números reales*)

(**) $$A = \left(\frac{1}{B}\right)\cdot C$$ (*identidad y propiedad conmutativa para la multiplicación*)

Usando la propiedad transitiva de la igualdad, se deduce de (*) y (**) que . . .

$$\frac{C}{B} = \left(\frac{1}{B}\right)\cdot C$$

Dividir por un número $B \neq 0$ ***es equivalente a multiplicar por el inverso multiplicativo de*** B**.**

De la misma manera, si A, B y C son números reales cualesquiera tales que $A+B=C$, se sigue entonces que. . .

(*) $A = C - B$ (*por ser la resta la operación inversa de la suma*)

$A+B+(-B) = C+(-B)$ (*regla de la suma para una igualdad*)

$A+[B+(-B)] = C+(-B)$ (*propiedad asociativa de la suma*)

$A+0 = C+(-B)$ (*propiedad de inverso aditivo de los números reales*)

(**) $A = C+(-B)$ (*propiedad de identidad para la suma*)

Usando ahora la propiedad transitiva de la igualdad, se deduce de las ecuaciones (*) y (**) que . . .

$$C - B = C+(-B)$$

Restar un número B es equivalente a sumar el inverso aditivo de B

Así por ejemplo . . .

i) $\frac{6}{7}$ es equivalente a $\left(\frac{1}{7}\right)\cdot 6$

ii) $3-4$ es equivalente a $3+(-4)$

iii) $\frac{(b-a)}{(b+a)}$ es equivalente a $\left(\frac{1}{b+a}\right)\cdot(b-a)$

iv) $\frac{5}{4}-\frac{3}{8}$ equivale a $\left(\frac{1}{4}\right)\cdot 5+\left[-\left(\frac{1}{8}\right)\cdot 3\right]$

1.8 Reglas de los signos para la multiplicación .

Ésta es otra consecuencia importante de las propiedades de la igualdad y de los números reales, puesto que a partir de ellas se demuestran las siguientes reglas:

Si A y B son dos números reales positivos se cumple que :

I. El producto de dos números de distinto signo es un número negativo

$$(-A)\cdot B = -A\cdot B \quad \textbf{o} \quad A\cdot(-B) = -A\cdot B$$

II. El producto de dos números del mismo signo es un número positivo

$$(-A)\cdot(-B) = A\cdot B \quad \textbf{o} \quad (A)\cdot(B) = A\cdot B$$

Sean A y B dos números reales *del mismo signo y distintos de cero* .

DEMOSTRACIÓN DE I :

$A+(-A)=0$	(propiedad del inverso aditivo)
$[A+(-A)]\cdot B=0\cdot B$	(regla multiplicativa de la igualdad)
$A\cdot B+(-A)\cdot B=0$	(propiedades del cero y distributiva de la suma)
$(-A)\cdot B+A\cdot B=0$	(propiedad conmutativa de la suma)
$[(-A)\cdot B+A\cdot B]-(A\cdot B)=0-(A\cdot B)$	(inverso aditivo de AB y aditiva de la igualdad)
$(-A)\cdot B+[A\cdot B-(A\cdot B)]=-(A\cdot B)$	(propiedad asociativa de la suma)
$(-A)\cdot B+0=-(A\cdot B)$	(el elemento identidad de la suma)
$-A\cdot B=-(A\cdot B)$	y queda demostrado .

DEMOSTRACIÓN DE II :

$A+(-A)=0$	(propiedad del inverso aditivo)
$[A+(-A)]\cdot(-B)=0\cdot(-B)$	(propiedad multiplicativa de la igualdad)
$A\cdot(-B)+(-A)\cdot(-B)=0$	(propiedad del cero y propiedad distributiva)
$(-A)\cdot(-B)+A\cdot(-B)=0$	(propiedad conmutativa de la suma)
$(-A)\cdot(-B)+(-A\cdot B)=0$	(regla I de signos de los números negativos)
$(-A)\cdot(-B)+(-A\cdot B)+A\cdot B=0+A\cdot B$	(inverso aditivo de $-A\cdot B$ y aditiva de la igualdad)
$(-A)\cdot(-B)+[(-A\cdot B)+A\cdot B]=A\cdot B$	(propiedad asociativa de la suma)
$(-A)\cdot(-B)+0=A\cdot B$	(elemento identidad de la suma)
$(-A)\cdot(-B)=A\cdot B$	y queda demostrado .

Otras reglas de signos para la multiplicación, derivadas de las dos anteriores son :

III	$(-1)\cdot A=-A$
IV	$-(-A)=A$
V	$-(A+B)=(-A)+(-B)=-A-B$

DEMOSTRACIÓN DE III : Sea A un número real distinto de cero . Entonces . . .

$(-1)\cdot A=-(1\cdot A)$	(por la regla I de signos demostrada anteriormente)
$(-1)\cdot A=-A$	(identidad para la multiplicación: $A\cdot 1=A$).

DEMOSTRACIÓN DE IV : Sea A un número real distinto de cero . Entonces . . .

$(-1)\cdot(-A)=-(-A)$	(regla III de signos demostrada antes)
$(1)\cdot(A)=-(-A)$	(regla II de signos aplicada al primer miembro)

$A = -(-A)$ (identidad para la multiplicación: $A \cdot 1 = A$).

$-(-A) = A$ (propiedad simétrica de la Igualdad)

El estudiante debe ser capaz ahora de demostrar la propiedad V .

Dado que el cociente de números reales queda definido en términos del producto, éstas reglas de signos valen también para la división . (con excepción de la división por cero), es decir. . .

Si A ***y*** B ***son dos números reales positivos se cumple que :***

I. El cociente de dos números de distinto signo es un número negativo

$$\frac{(-A)}{B} = -\left(\frac{A}{B}\right) \quad o \quad \frac{A}{(-B)} = -\left(\frac{A}{B}\right)$$

II. El cociente de dos números del mismo signo es un número positivo

$$\frac{-A}{-B} = \left(\frac{A}{B}\right) \quad o \quad \frac{A}{B} = \left(\frac{A}{B}\right)$$

Además, puesto que una substracción de números reales queda definida en términos de una suma, las reglas aditivas y de multiplicación de la igualdad, así como las leyes de cancelación valen también para ésta operación (con excepción de la división por cero) y toman la forma :

REGLA	SIGNIFICADO
Aditiva	**Si** $A = B$ **entonces** $(A - C) = (B - C)$
Multiplicativa	***Si*** $A = B$ ***entonces*** $A \cdot \left(\frac{1}{C}\right) = B \cdot \left(\frac{1}{C}\right)$ ***si*** $C \neq 0$
Cancelación aditiva	***Si*** $(A - C) = (B - C)$ ***entonces*** $A = B$
Cancelación del divisor	***Si*** $A \cdot \left(\frac{1}{C}\right) = B \cdot \left(\frac{1}{C}\right)$ ***entonces*** $A = B$

1.9 *Criterios de divisibilidad* .

El conjunto de números enteros $\mathbf{Z}$ es cerrado bajo la multiplicación, lo cual significa que el producto de dos números enteros a y b genera otro número c que también es entero, esto es . . .

$$a \cdot b = c \quad ; \quad a\,,\ b\,,\ c \in \mathbf{Z}$$

Se pueden decir entonces los tres siguientes enunciados equivalentes :

- *los números* a *y* b *son factores del número* c .
- *el número* c *es un múltiplo del número* a *o del número* b
- *el número* c *es divisible por el número* a *porque* $b = \dfrac{c}{a}$ *o por el número* b *porque* $a = \dfrac{c}{b}$

Por ejemplo en $8 \times 13 = 104$, decimos que :

104 *es un múltiplo de* 8 *y de* 13 .
8 *y* 13 *son factores de* 104
104 *es un divisible entre* 8 *y entre* 13 .

En general , ¿cómo saber si un número entero dado es divisible por otro número entero?.

Se enlistan enseguida algunos ***criterios de divisibilidad*** :

1° **Un número entero es divisible por 2 si termina en cero o en cifra par.**
Puesto que al separar las unidades, queda un número terminado en cero, que al igual que las unidades, también es divisible por 2 :

$$\frac{634}{2} = \left(\frac{630+4}{2}\right) = \left(\frac{630}{2} + \frac{4}{2}\right) = (315+2) = 317 \quad ;$$

$$\frac{64838}{2} = \left(\frac{64830+8}{2}\right) = \left(\frac{64830}{2} + \frac{8}{2}\right) = (32415+4) = 32419$$

2° **Un número entero es divisible por 3 si la suma de las cifras que forman tal número es divisible por 3.**
Esto se debe a que *todo número entero es un múltiplo de 3 más la suma de los valores de sus cifras*, como se muestra en el siguiente ejemplo :

$$\frac{2457}{3} = \frac{(1000\times 2) + (100\times 4) + (10\times 5) + 7}{3}$$

$$= \frac{(333\times 3+1)\times 2 + (33\times 3+1)\times 4 + (3\times 3+1)\times 5 + 7}{3}$$

$$= \frac{(333\times 3)\times 2 + (33\times 3)\times 4 + (3\times 3)\times 5 + (2+4+5+7)}{3}$$

y puesto que los primeros factores son múltiplos de 3 , todo el número inicial será divisible por 3 si la suma de sus cifras, indicada en el último término, también es divisible por 3 y queda:

$$\frac{2457}{3} = \frac{(333\times 3)\cdot 2}{3} + \frac{(33\times 3)\cdot 4}{3} + \frac{(3\times 3)\cdot 5}{3} + \frac{(2+4+5+7)}{3}$$

$$= 666 + 132 + 15 + \frac{18}{3} = 819$$

3° ***Un número entero es divisible por*** 4 ***si su dos últimas cifras son ceros o forman un múltiplo de*** 4.

Puesto que al separar las unidades y las decenas, queda un múltiplo de 100 , que es divisible por 4 dado que *el* 4 *divide al* 100 *y a cualquiera de sus múltiplos*.

$$\frac{130268}{4} = \left(\frac{130200+68}{4}\right) = \left(\frac{130200}{4} + \frac{68}{4}\right) = 32550 + 17 = 32567$$

Todo número divisible por 4, también es divisible por 2, ya que el 2 divide al 4.

4° ***Un número entero es divisible por*** 5 ***si termina en cero o en*** 5 .

Puesto que al separar las unidades, queda un número terminado en cero, es decir múltiplo de 10, el cual es divisible por 5, dado que *el* 5 *divide al 10 y a cualquiera de sus múltiplos*:

$$\frac{1615}{5} = \left(\frac{1610+5}{5}\right) = \left(\frac{1610}{5} + \frac{5}{5}\right) = (322+1) = 323 \quad ;$$

5° ***Un número entero es divisible por*** 7 ***cuando:***

1° separando la última cifra de la derecha,
2° multiplicándola por 2 ***y restando este producto del número que queda a la izquierda y***
3° repitiendo los pasos 1° y 2° anteriores se llega un residuo cero o a un múltiplo de 7.

Ejemplo : Determinar si el número 1743 es divisible por 7.

1 74´3 x 2	(*se multiplica la última cifra por* 2 : 3×2)
−6	(*se resta del número que queda* : $174 - 6 = 168$)
16´8 x 2	(*se repite el procedimiento*)
−16	
0	(*el residuo es cero, el número* 1743 *si es divisible por* 7)

y en efecto: $\dfrac{1743}{7} = 249$

<u>*Otro ejemplo*</u> : Determinar si el número 255241 es divisible por 7.

255 24´ 1 x 2 (*se multiplica la última cifra por* 2: $1 \times 2 = 2$)
−2 (*se resta del número que queda :* $25524 - 1 = 25523$)

2552´2 x 2 (*se multiplica la última cifra por* 2: $3 \times 2 = 6$)
−4 (*se resta del número que queda*: $2552 - 6 = 2548$)

254´8 x 2 (*se repite el procedimiento*)
−16

23´8 x 2 (*se repite el procedimiento*)
−16

07 (*residuo múltiplo de* 7, *el número dado es divisible por* 7)

y en efecto: $\dfrac{255241}{7} = 36463$

6 ° ***<u>Un número entero es divisible por</u>*** 11 ***<u>si la diferencia entre la suma de sus cifras de lugar impar y la suma de sus cifras de lugar par, contadas de derecha a izquierda, es cero o un múltiplo de</u>*** 11 **.**

<u>*Ejemplo*</u> : Determinar si el número 32417 es divisible por 11 .

$$\frac{32417}{11} = \left(\frac{30000 + 2000 + 400 + 10 + 7}{11}\right)$$

$$= \left[\frac{3\cdot(10000) + 2\cdot(1000) + 4\cdot(100) + 1\cdot(10) + 7}{11}\right]$$

$$= \left[\frac{3\cdot(909 \times 11 + 1) + 2\cdot(91 \times 11 - 1) + 4\cdot(9 \times 11 + 1) + 1\cdot(11 - 1) + 7}{11}\right]$$

$$= \frac{11 \times [(3 \times 909) + (2 \times 91) + (4 \times 9) + 1] + (3 - 2 + 4 - 1 + 7)}{11}$$

$$= [(3 \times 909) + (2 \times 91) + (4 \times 9) + 1] + \left(\frac{3 - 2 + 4 - 1 + 7}{11}\right)$$

y como las suma indicada en el último numerador es divisible por 11, el número inicial lo es también, es decir. . .

$$\frac{32417}{11} = [(3\times 909)+(2\times 91)+(4\times 9)+1]+\frac{11}{11}$$

$$= 2946+1$$

$$= 2947$$

Lo anterior se debe a que :

(::) *Un* 1 *seguido de un número impar de ceros es un múltiplo de* 11 *menos la unidad.*

$$10 = 11-1$$
$$1000 = 91\times 11-1$$
$$100000 = 9091\times 11-1$$
$$10000000 = 909091\times 11-1$$

etc.

(::) *Un* 1 *seguido de un número par de ceros es un múltiplo de* 11 *más la unidad.*

$$100 = 9\cdot 11+1$$
$$10000 = 909\times 11+1$$
$$1000000 = 90909\times 11+1$$

etc.

Otro ejemplo : Determinar si el número 38144975 es divisible por 11 .

Separando las cifras del número dado en pares e impares, de acuerdo al lugar que ocupan de derecha a izquierda, se tiene :

suma de cifras de lugar impar : $5+9+4+8 = 26$

suma de cifras de lugar par : $7+4+1+3 = 15$

y su diferencia es : $26-15 = 11$, un múltiplo de 11. Por lo tanto, éste número si es divisible entre 11 y queda : : $\dfrac{38144975}{11} = 3467725$

Existen otros criterios para la divisibilidad por otros números primos; sin embargo, no los enlistaremos todos. Por ejemplo, los criterios de divisibilidad por 13 o por 19 son es muy parecidos al criterio de divisibilidad por 7, excepto que las multiplicaciones se hacen por 9 o por 17 respectivamente, es decir :

7° ***Un número entero es divisible por*** 13 ***cuando:***

1° separando la última cifra de la derecha,

2° multiplicándola por 9 ***y restando este producto del número que queda a la izquierda***

3° repitiendo los pasos 1° y 2° anteriores se llega un residuo cero o a un múltiplo de 13**.**

1.10 ***Números primos*** .

Dos o mas números cuyo único divisor común sea el 1 se dice que son *primos entre si o primos relativos*.

Por ejemplo, los números 18 y 25 no tienen más divisor común que el 1 y son primos relativos, en cambio, los números 30 , 42 y 66 no son primos relativos puesto que tienen los divisores comunes 2 y 3 .

Los números que sólo son divisibles entre ellos mismos y la unidad se llaman *primos absolutos* .

La serie de números primos absolutos es infinita. Por ejemplo los primeros primos positivos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 etc.

Obsérvese que para que dos números sean primos relativos, no es necesario que sean primos absolutos; pero evidentemente, dos números primos absolutos también serán primos entre si.

En adelante nos referiremos simplemente como primos a los números primos absolutos. Todo número que no es primo se llama número compuesto .

Para determinar los primeros números primos, desde el 1 hasta un número dado N , se enlistan todos los números naturales comprendidos entre 1 y N y se sigue el siguiente procedimiento. . .

- a partir del 2 (que es el primer número primo), se elimina su cuadrado (4) y a partir del 4 se van eliminando todos los números naturales de dos en dos lugares.
- a partir del 3 (que es el segundo número primo), se elimina su cuadrado (9) y a partir del 9 se van eliminando todos los números naturales de tres en tres lugares.
- a partir del 5 (que es el siguiente número primo, puesto que no se eliminó en el paso anterior), se elimina su cuadrado (25) y a partir del 25 se van eliminando todos los números naturales de cinco en cinco lugares.
- a partir del 7 (que es el siguiente número primo, puesto que no se eliminó en el paso anterior), se elimina su cuadrado (49) y a partir del 49 se van eliminando todos los números naturales de siete en siete lugares.
- Se procede igual con los siguientes números (11, 13, 17 , etc.) que no se van eliminando

La operación termina cuando se llega a un número primo cuyo cuadrado sea mayor que número dado N .

Este procedimiento se conoce como ***Criba de Eratóstenes*** **,** se ilustra en la figura de la página siguiente y permite determinar si un número entero N es primo o no, pues basta con saber si tal número es divisible entre 2, 3, 5, 7, 11, . . .etc. (un número primo), y si se llega hasta un divisor p tal que $p^2 > N$ sin lograr división exacta, entonces N es primo, esto es . . .

" Un número entero N es primo si no es divisible entre ninguno de los números primos cuyo cuadrado sea menor que N . "

Criba de Eratóstenes

1	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	**67**	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	**103**	~~104~~	~~105~~	~~106~~	**107**	~~108~~	~~109~~	~~110~~
~~111~~	~~112~~	**113**	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~

etc. . . . .

Los números de este arreglo que no se eliminan por el procedimiento descrito anteriormente, son los números primos buscados.
Se llama *criba* porque al ir eliminando números se van creando "agujeros" y se llama *de Eratóstenes* porque fué este matemático griego el creador de este procedimiento.

Ejemplo 6 . Determinar si el número 839 es primo o no.

Solución :

El número 839 no es divisible entre . . .

2 porque no termina en cifra par.

3 porque $(8+3+9=20)$ no es múltiplo de 3.

5 porque no termina en 5 o en cero

7 porque

$$\begin{array}{l} \ \ 83´9 \times 2 \\ -18 \\ \hline \ \ \ 6´5 \times 2 \\ -10 \\ \hline \ \ -4 \end{array}$$

el residuo no es múltiplo de 7

11 porque la diferencia $[(9+8)-3=14]$ no es múltiplo de 11

13 porque $\frac{839}{13}=64+\frac{7}{13}$

17 porque $\frac{839}{17}=49+\frac{6}{17}$

19 porque $\frac{839}{19}=44+\frac{3}{19}$

23 porque $\frac{839}{23}=36+\frac{11}{23}$

29 porque $\frac{839}{29}=28+\frac{27}{29}$

y como $29^2=841>839$, éste número es por lo tanto primo, puesto que no hay ningún número primo menor que lo divida.

Ejemplo 7 . Determinar si el número 361 es primo o no.

Solución :

El número 361 no es divisible entre . . .

2 porque no termina en cifra par.

3 porque $(3+6+1=10)$ no es múltiplo de 3.

5 porque no termina en 5 o en cero

7 porque

$$\begin{array}{r} 36\acute{}1 \times 2 \\ -2 \\ \hline 3\acute{}4 \times 2 \\ -8 \\ \hline -5 \end{array}$$

el residuo no es múltiplo de 7

11 porque la diferencia $[(3+1)-6=-2]$ no es múltiplo de 11

Además . . .

$\frac{361}{13}=27+\frac{10}{13}$; $\frac{361}{17}=21+\frac{4}{17}$; $\frac{361}{19}=19$

así que $361=19\times 19$ y por lo tanto no es un número primo

1.11 *Teorema fundamental de la Aritmética*.

" Todo número compuesto es igual a un producto único de factores primos "

Aunque no se demostrará aquí este teorema, el procedimiento para encontrar la descomposición de un número compuesto en sus factores primos es :

1. ***Dividir el número dado entre el menor divisor primo posible***
2. ***El cociente obtenido se divide nuevamente entre el menor divisor primo posible***
3. ***Se repite el paso 2 hasta obtener 1 como cociente***
4. ***El producto de los divisores primos usados es igual al número compuesto***

Ejemplo 8 . Hallar los factores primos del número 450

Solución :

450 | 2	450 es divisible por 2 porque termina en 0
225 | 3	el cociente anterior 225, es divisible por 3 porque 2+2+5 = 9 es múltiplo de 3
75 | 3	el cociente 75, es divisible por 3 porque 7+5 = 12 es múltiplo de 3
25 | 5	el cociente 25, es divisible por 5 porque termina en 5
5 | 5	el cociente 5, es divisible por 5
1 |	

De modo que los factores primos de 450 son : $450 = (2)\cdot(3)\cdot(3)\cdot(5)\cdot(5) = 2\cdot 3^2\cdot 5^2$

Ejemplo 9 . Hallar los factores primos del número 75600

Solución :

75600 | 2	75600 es divisible por 2 porque termina en 0
37800 | 2	el cociente anterior 37800 es divisible por 2 porque termina en 0
18900 | 2	el cociente anterior 18900 es divisible por 2 porque termina en 0
9450 | 2	el cociente anterior 9450 es divisible por 2 porque termina en 0
4725 | 3	el cociente 4725 es divisible por 3 porque 4+7+2+5 = 18 es múltiplo de 3.
1575 | 3	el cociente 1575 es divisible por 3 porque 1+5+7+5 =18 es múltiplo de 3.
525 | 3	el cociente 525 es divisible por 3 porque 5+2+5 =12 es múltiplo de 3.
175 | 5	el cociente 175 es divisible por 5 porque termina en 5 .
35 | 5	el cociente 35 es divisible por 5 porque termina en 5
7 | 7	7 es un número primo.
1 |	

De modo que los factores primos de 75600 son : $75600 = 2^4\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7$

Este proceso se conoce como *factorización en primos* .

1.12 *Máximo común divisor (m.c.d.) .*

Dados dos o más números enteros, su máximo común divisor *es el mayor divisor que tienen en común tales números*, es decir es el mayor número entero posible que los divide a todos exactamente.
Enlistemos por ejemplo los divisores de 36 , 54 y 120

DIVISORES															
36		2	3	4	**6**	12	18	36							
54		2	3	**6**	9	18	27	54							
120		2	3	4	5	**6**	8	10	12	15	20	30	40	60	120

Tienen en común los divisores 2, 3, 4, y 6 . El mayor de ellos es 6, por eso se escribe:

$$mcd\,(36\,,54\,,120) = 6$$

Cuando no es fácil hallar el mcd de dos o más números por simple inspección o enlistando los divisores como en el ejemplo anterior, éste puede hallarse descomponiendo en factores primos a los números dados. El mcd es entonces . . .

" El producto de los factores primos <u>comunes</u> elevados a la menor potencia "

de este modo se garantiza el mcd divida a todos los números dados, puesto que contendrá *únicamente* a los factores comunes de menor valor en tales números .

<u>Ejemplo</u> 10 . Hallar el mcd de los números 858 , 2288 y 3575

<u>Solución :</u> Aplicando los criterios de divisibilidad, se puede comprobar que la descomposición en sus correspondientes factores primos de los números dados es . . .

$$858 = (2)\cdot(3)\cdot(11)\cdot(13) \quad ; \quad 2288 = \left(2^4\right)\cdot(11)\cdot(13) \quad \text{y} \quad 3575 = \left(5^2\right)\cdot(11)\cdot(13)$$

y por lo tanto, los factores primos comunes son 11 y 13 , así que

$$mcd\,(858\,,2288\,,3575) = 11\times 13 = 143$$

<u>Ejemplo</u> 11 . Hallar el mcd de los números 1560 , 2400 , 5400 y 6600

<u>Solución :</u> Según los criterios de divisibilidad, la descomposición en factores primos es:

$$858 = \left(2^3\right)\cdot(3)\cdot(5)\cdot(13)$$
$$2288 = \left(2^5\right)\cdot(3)\cdot\left(5^2\right)$$
$$5400 = \left(2^3\right)\cdot\left(3^3\right)\cdot\left(5^2\right)$$
$$6600 = \left(2^3\right)\cdot(3)\cdot\left(5^2\right)\cdot(11)$$

Los factores primos comunes son 2, 3 y 5. Escogiendo *su menor potencia* y haciendo su producto resulta :

$$mcd\,(1560\,,2400\,,5400\,,6600) = \left(2^3\right) \times (3) \times (5) = 120$$

es decir, el número 120 es el mayor entero que divide exactamente a los cuatro números dados.

Ejemplo 12 . Un carpintero desea recortar tres tiras de madera de $5.4 \cdot m$, $3.6 \cdot m$ y $6.48 \cdot m$ de longitud, en pedazos iguales sin desperdiciar nada en ninguna de las tres tiras. ¿Cuál debe ser el mayor tamaño posible de los pedazos que corte ?

Solución : Se busca el mcd de los tres números dados. Descomponiendo en sus factores primos:

$$540 \cdot cm = \left(2^2\right) \cdot \left(3^3\right) \cdot (5) \cdot cm$$
$$360 \cdot cm = \left(2^3\right) \cdot \left(3^2\right) \cdot (5) \cdot cm$$
$$648 \cdot cm = \left(2^3\right) \cdot \left(3^4\right) \cdot cm$$

los factores primos comunes son : 2 y 3 así que, escogiendo su menor potencia y haciendo su producto resulta :

$$mcd\,(540\,,360\,,648) = \left(2^2\right) \times \left(3^2\right) = 36$$

así que los pedazos medirán todos $36 \cdot cm$ y no se desperdiciará nada de madera.

1.13 ***Mínimo común múltiplo*** ***(m.c.m.)***

.

Dados dos o más números enteros, su mínimo común múltiplo es el menor entero que los contiene a todos ellos un número exacto de veces.
Enlistemos por ejemplo los múltiplos de 3, 4 y 6

MULTIPLOS													
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84

Estos números tienen varios múltiplos comunes: 12, 24, 36, 48, etc. pero el menor de todos es 12

Cuando se trata de hallar el mcm. de números pequeños, se puede hacer por inspección directa, comenzando con el mayor de ellos y determinando si contiene exactamente, a los demás. Si es así, entonces ese número es el mcm.. Si no los contiene, se busca cual es el menor múltiplo del número mayor que contenga exactamente a los demás números del grupo.

Sin embargo, cuando no es fácil hallar el mcm por simple inspección, se procede a descomponer los números dados en sus factores primos y entonces el mcm es :

> ***" el producto de los factores primos <u>comunes</u> y <u>no comunes</u> elevados a la mayor potencia a la que aparezcan en la descomposición de los números iniciales "***

de ésta manera se garantiza que todos los factores de todos los números del grupo estarán contenidos al menos una vez en el mcm.

Ejemplo 13 . Hallar el mínimo común múltiplo de 14, 38, 56 y 114

Solución : Aplicando los criterios de divisibilidad, se puede comprobar que la descomposición de los números dados en sus correspondientes factores primos es . . .

$$14 = (2)\cdot(7) \;; \qquad 38 = (2)\cdot(19) \;; \qquad 56 = \left(2^3\right)\cdot(7) \quad \text{y} \quad 114 = (2)\cdot(3)\cdot(19)$$

Por lo tanto, el producto de los factores primos comunes y no comunes *elevados a su mayor potencia* de los cuatro números del grupo, es . . .

$$mcm(14\,,38\,,56\,,114) \;=\; 2^3\times 3\times 7\times 19 \;=\; 3192$$

este es el número más pequeño que contiene exactamente un número entero de veces a todos los números del grupo inicial, es decir . . .

$$\frac{3192}{14} = \frac{2^3\times 3\times 7\times 19}{2\times 7} = 2^2\times 3\times 19 = 228$$

$$\frac{3192}{38} = \frac{2^3\times 3\times 7\times 19}{2\times 19} = 2^2\times 3\times 7 = 84$$

$$\frac{3192}{56} = \frac{2^3\times 3\times 7\times 19}{2^3\times 7} = 3\times 19 = 57$$

y

$$\frac{3192}{114} = \frac{2^3\times 3\times 7\times 19}{2\times 3\times 19} = 2^2\times 7 = 28$$

Ejemplo 14 . Hallar el mínimo común múltiplo de 120, 240, 300 y 400

Solución : Según los criterios de divisibilidad, la descomposición de los números dados en factores primos es la indicada en los siguientes esquemas:

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

400	2
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5 \qquad 240 = 2^4 \times 3 \times 5 \qquad 300 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \qquad 400 = 2^4 \times 5^2$$

En los cuales se han indicado en la columna de la derecha el menor divisor primo posible del número a la izquierda y en la columna de la izquierda se indican los residuos de las divisiones correspondientes.

El producto de los factores primos comunes y no comunes a los cuatro números del grupo, elevados a su mayor potencia es . . .

$$mcm(120,240,300,400) = 2^4 \times 3 \times 5^2 = 1200$$

Ejemplo 15 . ¿ Cual debe ser la menor longitud de una varilla que se desea cortar en pedazos de $8 \cdot cm$, $9 \cdot cm$ cm o $15 \cdot cm$ de longitud para que no sobre ni falte nada y cuántos pedazos de cada longitud se podrían obtener de tal varilla ?

Solución :

Evidentemente, se busca el mínimo común múltiplo de los números enteros 8, 9 y 15, así que descomponiendo en sus factores primos se obtiene . . .

$$8 = 2^3 \quad ; \quad 9 = 3^2 \quad ; \quad 15 = 3 \times 5$$

de modo que: $mcm(8,9,15) = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$

La varilla deberá medir una longitud de $360 \cdot cm$ y el número de pedazos de cada longitud será:

de $8 \cdot cm$: $\dfrac{360}{8} = \dfrac{2^3 \times 3^2 \times 5}{2^3} = 45$ pedazos

de $9 \cdot cm$: $\dfrac{360}{9} = \dfrac{2^3 \times 3^2 \times 5}{3^2} = 40$ pedazos

y de $15 \cdot cm$: $\dfrac{360}{15} = \dfrac{2^3 \times 3^2 \times 5}{3 \times 5} = 24$ pedazos

Ejemplo 16 . Hallar el menor número de bombones necesario para repartir entre 3 grupos de 20 alumnos, 25 alumnos y 30 alumnos, de modo que cada alumno reciba un número exacto de bombones. ¿Cuántos bombones recibirá cada alumno de cada grupo ?

Solución :
Se busca el mínimo común múltiplo de los números enteros 20, 25 y 30, así que descomponiendo éstos números en sus factores primos se obtiene . . .

$$20 = 2^2 \times 5 \quad ; \quad 25 = 5^2 \quad ; \quad 30 = 2 \times 3 \times 5$$

de modo que $mcm(20,25,30) = 2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$.
Por lo tanto, 300 bombones es el mínimo número de bombones para repartir en cada grupo y el número de bombones que recibirá cada alumno, es . . .

$$1^{er} \text{ grupo: } \frac{300}{20} = \frac{2^2 \times 3 \times 5^2}{2^2 \times 5} = 15 \quad ; \quad 2^{o} \text{ grupo: } \frac{300}{25} = \frac{2^2 \times 3 \times 5^2}{5^2} = 12$$

$$3^{er} \text{ grupo: } \frac{300}{30} = \frac{2^2 \times 3 \times 5^2}{2 \times 3 \times 5} = 10$$

1.14 Fracciones .

Una fracción *es el cociente de dos números enteros* A y B y se denota comúnmente por : $\frac{A}{B}$

donde el número B se llama *denominador* (o *divisor)* y el número A se llama *numerador* (o *dividendo*) . El número B debe ser distinto de cero ($B \neq 0$), pues la división por cero no está definida.

Como parte del conjunto de números reales, las fracciones satisfacen todas las propiedades correspondientes a los números los reales y obedecen todas sus reglas .
Sean por ejemplo las fracciones : $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{D}$ y $\frac{1}{B \cdot D}$ siendo $B \neq 0$ y $D \neq 0$.
Consideremos el número $(B \cdot D)$ multiplicado por su inverso . . .

$$\left(\frac{1}{B \cdot D}\right) \cdot B \cdot D = 1$$ (*propiedad de inverso multiplicativo*)

$$\left(\frac{1}{B \cdot D}\right) \cdot B \cdot D \times \left(\frac{1}{D} \cdot \frac{1}{B}\right) = (1) \times \left(\frac{1}{D} \cdot \frac{1}{B}\right)$$ (*propiedad de multiplicación para una igualdad*)

$$\left(\frac{1}{B \cdot D}\right) \cdot B \cdot \left(D \cdot \frac{1}{D}\right) \cdot \frac{1}{B} = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{B}$$ (*propiedad asociativa de la multiplicación*)

$$\left(\frac{1}{B\cdot D}\right)\cdot B\cdot(1)\cdot\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{1}{D}\cdot\frac{1}{B}$$ (*propiedad de inverso multiplicativo*)

$$\left(\frac{1}{B\cdot D}\right)\cdot\left(B\cdot\frac{1}{B}\right) = \frac{1}{D}\cdot\frac{1}{B}$$ (*propiedad asociativa*)

$$\left(\frac{1}{B\cdot D}\right)\cdot(1) = \frac{1}{D}\cdot\frac{1}{B}$$ (*propiedad de inverso multiplicativo*)

$$\frac{1}{B}\cdot\frac{1}{D} = \frac{1}{D\cdot B}$$

Por lo tanto, ***el producto de dos fracciones cuyo numerador es la unidad, es otra fracción cuyo denominador es el producto de los denominadores iniciales .***

Analizemos ahora el producto de fracciones con distinto numerador : $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}$ con $B \neq 0$, $D \neq 0$

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D} = \left(\frac{1}{B}\cdot A\right)\cdot\left(\frac{1}{D}\cdot C\right)$$ (*dividir equivale a multiplicar por el inverso*)

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D} = \frac{1}{B}\cdot\left(A\cdot\frac{1}{D}\right)\cdot C$$ (*propiedad asociativa de la multiplicación*)

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D} = \frac{1}{B}\cdot\left(\frac{1}{D}\cdot A\right)\cdot C$$ (*propiedad conmutativa de la multiplicación*)

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D} = \left(\frac{1}{B}\cdot\frac{1}{D}\right)\cdot A\cdot C$$ (*propiedad asociativa de la multiplicación*)

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D} = \left(\frac{1}{B\cdot D}\right)\cdot A\cdot C$$ (*por la regla anterior* $\frac{1}{B}\cdot\frac{1}{D} = \frac{1}{B\cdot D}$)

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D} = \frac{A\cdot C}{B\cdot D}$$ (*multiplicar por el inverso equivale a dividir*)

De ésta manera se ha demostrado que : ***al multiplicar dos fracciones, se obtiene otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador el producto de los denominadores iniciales.***

Así por ejemplo . . .

$$\frac{3}{4}\times\frac{8}{10} = \frac{3\times 8}{4\times 10} = \frac{24}{40} \quad ; \quad \frac{5}{7}\times\frac{7}{5} = \frac{5\times 7}{7\times 5} = 1 \quad ; \quad \frac{3\cdot a\cdot b}{2}\times\frac{4}{5\cdot c\cdot d} = \frac{12\cdot a\cdot b}{10\cdot c\cdot d}$$

Demostremos ahora ***el principio fundamental de las fracciones :***

Si cada miembro de una fracción se multiplica o se divide por una misma cantidad diferente de cero, el valor de la fracción no se altera .

La demostración de ése principio es inmediata a partir del resultado anterior .

Sea X cualquier número real distinto de cero ($X \neq 0$) . Dado que $\frac{X}{X} = 1$ se tiene que . . .

1°
$$\frac{A}{B} = \frac{A}{B} \times (1) = \frac{A}{B} \times \frac{X}{X} = \frac{A \cdot X}{B \cdot X}$$

2°
$$\frac{A}{B} = \frac{A}{B} \times (1) = \frac{A}{B} \times \frac{\left(\frac{1}{X}\right)}{\left(\frac{1}{X}\right)} = \frac{A \cdot \frac{1}{X}}{B \cdot \frac{1}{X}} = \frac{\left(\frac{A}{1} \cdot \frac{1}{X}\right)}{\left(\frac{B}{1} \cdot \frac{1}{X}\right)} = \frac{\left(\frac{A}{X}\right)}{\left(\frac{B}{X}\right)}$$

Consecuencia de éste principio, son las siguientes reglas . . .

REGLAS DE LOS SIGNOS PARA LAS FRACCIONES

I ***Si el numerador y el denominador tienen signos opuestos, la fracción es negativa***

$$\frac{(-A)}{B} = \frac{A}{(-B)} = -\left(\frac{A}{B}\right)$$

II ***Si el numerador y el denominador tienen el mismo signo, la fracción es positiva***

$$\frac{-A}{-B} = \frac{A}{B}$$

DEMOSTRACIÓN :

I Por las reglas de los signos (III) y (IV) de la multiplicación se tiene que . . .

$$-\left(\frac{A}{B}\right) = \left[(-1) \times \frac{A}{B}\right] = \left[\frac{(-1)}{(1)} \times \frac{A}{B}\right] = \frac{(-1)\cdot(A)}{(1)\cdot B} = \frac{-A}{B}$$

y también . . .

$$\frac{-A}{B} = \left[(1) \times \frac{-A}{B}\right] = \left[\frac{(-1)}{(-1)} \times \frac{-A}{B}\right] = \frac{(-1)\cdot(-A)}{(-1)\cdot B} = \frac{A}{-B}$$

II. $\dfrac{-A}{-B} = \dfrac{(-1)\cdot(A)}{(-1)\cdot(B)} = \dfrac{(-1)}{(-1)} \times \dfrac{A}{B} = 1\cdot\dfrac{A}{B} = \dfrac{A}{B}$

Así por ejemplo . . .

$$\frac{4}{3} = \frac{4\times 7}{3\times 7} = \frac{28}{21} \quad ; \quad \frac{4}{3} = \frac{4\times(-3)}{3\times(-3)} = \frac{-12}{-9} = \frac{12}{9}$$

de modo que las fracciones $\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{12}{9}$, $\dfrac{-12}{-9}$ o $\dfrac{28}{21}$ representan el mismo número racional .

$$\frac{24}{40} = \frac{\left(\frac{24}{4}\right)}{\left(\frac{40}{4}\right)} = \frac{6}{10} \quad ; \quad \frac{24}{40} = \frac{\left(\frac{24}{-8}\right)}{\left(\frac{40}{-8}\right)} = \frac{-3}{-5} \quad ; \quad \frac{24}{40} = \frac{\left(\frac{24}{2}\right)}{\left(\frac{40}{2}\right)} = \frac{12}{20}$$

de modo que las fracciones $\dfrac{24}{40}$, $\dfrac{12}{20}$, $\dfrac{6}{10}$ o $\dfrac{-3}{-5}$ representan el mismo número.

¿Y cómo se dividen las fracciones ? .

Busquemos primero el inverso de una fracción cualquiera, por ejemplo $\dfrac{C}{D}$.

Dado que todo número real multiplicado por su inverso es la unidad, se tiene : $\dfrac{C}{D} \times \dfrac{1}{\left(\frac{C}{D}\right)} = 1$

Multiplicando esta igualdad por $\dfrac{D}{C}$ queda : $\dfrac{D}{C} \times \left[\dfrac{C}{D} \times \dfrac{1}{\left(\frac{C}{D}\right)}\right] = \dfrac{D}{C} \times 1$

usando ahora la *propiedad asociativa* : $\left(\dfrac{D}{C} \times \dfrac{C}{D}\right) \times \dfrac{1}{\left(\frac{C}{D}\right)} = \dfrac{D}{C}$

aplicando la *multiplicación de fracciones* : $1 \times \dfrac{1}{\left(\frac{C}{D}\right)} = \dfrac{D}{C}$

de modo que el inverso de $\dfrac{C}{D}$ ***es*** $\dfrac{D}{C}$

Hagamos ahora la división de la fracción $\dfrac{A}{B}$ entre la fracción $\dfrac{C}{D}$, es decir : $\dfrac{\left(\frac{A}{B}\right)}{\left(\frac{C}{D}\right)}$

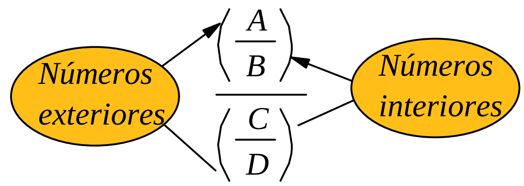
Dividir por el número $\dfrac{C}{D}$ equivale a multiplicar por su inverso: $\dfrac{\left(\dfrac{A}{B}\right)}{\left(\dfrac{C}{D}\right)} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{C}{D}\right)} \times \dfrac{A}{B}$

usando el inverso de $\dfrac{C}{D}$ y la regla de multiplicación queda : $\dfrac{\left(\dfrac{A}{B}\right)}{\left(\dfrac{C}{D}\right)} = \dfrac{D}{C} \times \dfrac{A}{B} = \dfrac{D \cdot A}{C \cdot B}$

Queda así demostrada la regla para dividir fracciones . . .

REGLA PARA DIVIDIR FRACCIONES

Multiplicar los números exteriores (A y D) para obtener el nuevo numerador .
Multiplicar los números interiores (B y C) para obtener el nuevo denominador



Así por ejemplo . . .

$$\frac{\left(\frac{4}{3}\right)}{\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{4 \times 4}{3 \times 5} = \frac{16}{15} \quad ; \quad \frac{\left(\frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{2}{7}\right)} = \frac{1 \times 7}{5 \times 2} = \frac{7}{10} \quad ; \quad \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{2 \times 5}{3 \times 2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Finalmente, sólo nos falta obtener la *regla para sumar fracciones*, la cual se deriva también de las propiedades de los números reales.

Sumemos primero dos fracciones que tengan *el mismo denominador* : $\dfrac{A}{B}$ y $\dfrac{C}{B}$ con $B \neq 0$.

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \left(\frac{1}{B} \times A\right) + \left(\frac{1}{B} \times C\right)$$ (*dividir por B equivale a multiplicar por su inverso*)

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{1}{B} \cdot (A + C)$$ (*propiedad distributiva de la multiplicación*)

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A + C}{B}$$ (*multiplicar por el inverso de B equivale a dividir por B*)

Se ha desmostrado entonces que : ***para sumar dos fracciones con el mismo denominador, simplemente se suman sus numeradores y se conserva el mismo denominador*** .

Por ejemplo:

i) $\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=\frac{(4+5)}{3}=\frac{9}{3}=3$

ii) $\frac{7}{5}-1=\frac{7}{5}+\left(-\frac{5}{5}\right)=\frac{7+(-5)}{5}=\frac{2}{5}$

iii) $\frac{2}{3}-\frac{7}{3}=\frac{2}{3}+\left(-\frac{7}{3}\right)=\frac{2+(-7)}{3}=\frac{-5}{3}=-\left(\frac{5}{3}\right)$

iv) $\frac{2}{3}+\frac{2}{6}=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2+1}{3}=1$ dado que $\frac{2}{6}=\frac{2\times 1}{2\times 3}=\frac{1}{3}$

Para sumar fracciones que tengan distintos denominadores, primero *se deben transformar* usando el principio fundamental de las fracciones, en fracciones que tengan *el mismo denominador común*

Considérese las fracciones $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ con $B\neq 0$ y $D\neq 0$. Al tranformarlas en fracciones equivalentes . . .

$$\frac{A}{B}=\left(\frac{A}{B}\times 1\right)=\left(\frac{A}{B}\times\frac{D}{D}\right)=\frac{A\cdot D}{B\cdot D}$$

y

$$\frac{C}{D}=\left(\frac{C}{D}\times 1\right)=\left(\frac{C}{D}\times\frac{B}{B}\right)=\frac{C\cdot B}{B\cdot D}$$

que ya tienen el mismo denominador y por lo tanto, la suma original $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}$ equivale a la suma :

$$\left(\frac{A\cdot D}{B\cdot D}\right)+\left(\frac{C\cdot B}{B\cdot D}\right)$$

Así que aplicando la regla anterior para sumar fracciones con el mismo denominador se obtiene . . .

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\left(\frac{A\cdot D+CB}{B\cdot D}\right)$$

Por ejemplo:

i) $\frac{4}{3}+\frac{5}{2}=\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{3}\right)=\frac{4\cdot(2)+5\cdot(3)}{(3)\cdot(2)}=\frac{8+15}{6}=\frac{23}{6}$

ii) $\dfrac{7}{6} - 1 = \left(\dfrac{7}{6} - \dfrac{6}{6}\right) = \left[\dfrac{7}{6} + \dfrac{(-6)}{6}\right] = \dfrac{7+(-6)}{6} = \dfrac{1}{6}$

(éste ejemplo ilustra que siempre podemos escribir la unidad como el cociente: $1 = \dfrac{A}{A}$ para cualquier número real $A \neq 0$)

iii) $\dfrac{7}{6} - \dfrac{3}{4} = \left[\dfrac{7}{6} + \left(\dfrac{-3}{4}\right)\right] = \left(\dfrac{7}{6}\cdot\dfrac{4}{4}\right) + \left(\dfrac{-3}{4}\cdot\dfrac{6}{6}\right) = \dfrac{7\cdot(4) + (-3)\cdot(6)}{6 \times 4} = \dfrac{28-18}{24} = \dfrac{10}{24} = \dfrac{5}{12}$

iv) $\dfrac{7}{72} + \dfrac{23}{108} = \left[\dfrac{7\cdot(108) + 72\cdot(23)}{72 \times 108}\right] = \left(\dfrac{756+1656}{7776}\right) = \dfrac{2412}{7776}$

El resultado de este ejemplo, puede escribirse en su ***mínima expresión***, *dividiendo la fracción por el máximo común divisor del numerador y del denominador* que es . . .

$$mcd(2412, 7776) = mcd\cdot\left[\left(2^2 \times 3^2 \times 67\right), \left(2^5 \times 3^5\right)\right] = 2^2 \times 3^2 = 36$$

y resulta . . .

$$\frac{7}{72} + \frac{23}{108} = \frac{2412}{7776} = \left[\frac{\left(\frac{2412}{36}\right)}{\left(\frac{7776}{36}\right)}\right] = \frac{\left(\frac{2^2 \times 3^2 \times 67}{2^2 \times 3^2}\right)}{\left(\frac{2^5 \times 3^5}{2^2 \times 3^2}\right)} = \frac{67}{216}$$

1.15 *El mínimo común denominador* .

Como se muestra en el último ejemplo anterior, cuando se sumamos dos o más fracciones, los productos podrían llegar a ser números muy grandes y nuestra paciencia para sumarles y luego simplificar el resultado podría llegar a un límite en el que seríamos tentados a abandonar el procedimiento.

Para simplificar la suma de fracciones y no tentar a nuestra paciencia, es conveniente transformar todas las fracciones iniciales en otras fracciones equivalentes que tengan *un denominador común, pero mínimo*, es decir el menor de todos los posibles, llamado *el mínimo común denominador* que es simplemente ***el mínimo común múltiplo de los denominadores*** de todas las fracciones.

Resolvamos de nuevo el último ejemplo anterior, sumado ahora con el método del mínimo común denominador:
El primer paso es factorizar los denominadores en sus factores primos . . .

$$\frac{7}{72} + \frac{23}{108} = \frac{7}{2^3 \times 3^2} + \frac{23}{3^3 \times 2^2}$$

Notemos que mínimo común múltiplo de los denominadores es : $mcm(72, 108) = 2^3 \times 3^3 = 216$.
Transformando entonces cada fracción en otra equivalente para que tengan el denominador 216 queda:

$$\frac{7}{72} + \frac{23}{108} = \left[\frac{7}{(2)^3\cdot(3)^2} \times \frac{3}{3} + \frac{23}{(3)^3\cdot(2)^2} \times \frac{2}{2}\right] = \left[\frac{21}{\left(2^3\right)\cdot\left(3^3\right)} + \frac{46}{\left(2^3\right)\cdot\left(3^3\right)}\right] = \frac{67}{216}$$

En el resultado final se obtiene así una fracción en su mínima expresión que ya no es necesario simplificar.

Consideremos otros ejemplos. . .

v) $\dfrac{5}{18}-\dfrac{7}{8}-\dfrac{11}{12}$

Factoricemos en primos los denominadores de ésta fracción . . .

$$\frac{5}{18}-\frac{7}{8}-\frac{11}{12}=\frac{5}{2\times 3^2}+\frac{(-7)}{2^3}+\frac{-11}{2^2\times 3}$$

de modo que su mínimo común múltiplo es : $mcm(18,8,12)=2^3\times 3^2 = 72$.
Multiplicando cada fracción por los factores que le falten para que su denominador sea igual al mcm se obtiene

$$\frac{5}{18}-\frac{7}{8}-\frac{11}{12}=\left[\frac{5}{2\cdot(3^2)}\right]\times\frac{2^2}{2^2}+\left[\frac{(-7)}{2^3}\right]\times\frac{3^2}{3^2}+\left[\frac{-11}{2^2\cdot(3)}\right]\times\frac{3}{3}\times\frac{2}{2}$$

$$=\frac{5\cdot(2^2)}{(3^2)\cdot(2^3)}+\frac{(-7)\cdot(3^2)}{(2^3)\cdot(3^2)}+\frac{(-11)\cdot(2)\cdot(3)}{(2^3)\cdot(3^2)}$$

$$=\frac{20}{72}+\frac{(-63)}{72}+\frac{(-66)}{72}$$

$$=\frac{-109}{72}$$

vi) $\dfrac{5}{36}-\dfrac{7}{12}+\dfrac{3}{20}-\dfrac{7}{50}$

Factorizando en primos los denominadores se obtiene . . .

$$\frac{5}{36}-\frac{7}{12}+\frac{3}{20}-\frac{7}{50}=\frac{5}{2^2\times 3^2}+\frac{(-7)}{2^2\times 3}+\frac{3}{2^2\times 5}+\frac{(-7)}{2\times 5^2}$$

de modo que $mcm(36,12,20,50)=2^2\times 3^2\times 5^2 = 900$, así que *multiplicando cada fracción por los factores que le falten a su denominador para ser igual al mcm*, se obtiene :

$$\frac{5}{36}-\frac{7}{12}+\frac{3}{20}-\frac{7}{50}=$$

$$=\left(\frac{5}{2^2\cdot 3^2}\right)\times\frac{5^2}{5^2}+\left(\frac{-7}{2^2\cdot 3}\right)\times\frac{3}{3}\times\frac{5^2}{5^2}+\left(\frac{3}{2^2\cdot 5}\right)\times\frac{3^2}{3^2}\times\frac{5}{5}+\left(\frac{-7}{2\cdot 5^2}\right)\times\frac{2}{2}\times\frac{3^2}{3^2}$$

$$= \frac{5^3}{2^2 \times 3^2 \times 5^2} + \frac{(-7) \times 3 \times 5^2}{2^2 \times 3^2 \times 5^2} + \frac{3^3 \times 5}{2^2 \times 3^2 \times 5^2} + \frac{(-7) \times 2 \times 3^2}{2^2 \times 3^2 \times 5^2}$$

$$= \frac{125}{900} + \frac{(-525)}{900} + \frac{135}{900} + \frac{(-126)}{900}$$

$$= \frac{125 - 525 + 135 - 126}{900}$$

$$= \frac{-391}{900}$$

En resumen, las fracciones tienen las siguientes propiedades . . .

PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES

Si A ***,*** B ***,*** C ***y*** D ***son números enteros tales que*** $B \neq 0$ ***y*** $D \neq 0$ ***, entonces valen las siguientes propiedades:***

I) *multiplicación* : $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$

II) *principio fundamental* : $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot X}{B \cdot X} = \frac{\left(\frac{A}{X}\right)}{\left(\frac{B}{X}\right)}$ ***para*** $X \neq 0$

III) *regla de signos* $-\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}$ ***y*** $\frac{-A}{-B} = \frac{A}{B}$

IV) *suma* $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D + C \cdot (B)}{B \cdot D}$

V) *división* $\frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{\left(\frac{C}{D}\right)} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$

EJERCICIO 1.1

I. Identificar la(s) propiedad(es) de los números reales ilustrada en cada una de las siguientes igualdades

1. $3+4 = 4+3$
2. $(5+11)\cdot 6 = (5)\cdot(6)+(11)\cdot(6)$
3. $2\cdot(x+3) = 2\cdot x+6$
4. $h+0 = h$
5. $70.25+17.32 = 87.57$
6. $2\cdot x+2\cdot y = 2\cdot(x+y)$
7. $x+(y+10) = (x+y)+10$
8. $-10+(8+10) = -10+(10+8) = 0+8 = 8$
9. $\dfrac{1}{h+6}\cdot(h+6) = 1$

II. Evaluar cada expresión. (No usar calculadora)

10. $(8-17)+3$
11. $3-(-6)$
12. $10-6-2$
13. $-3\cdot(5-2)$
14. $(4-7)\cdot(-2)$
15. $11-6-2+1$
16. $13-14+2+8$
17. $2-3-12+1$
18. $7+(-2)+(-3)$
19. $19+(-3)-(8)$
20. $(-5)\cdot(-8)$
21. $2\cdot\left(\dfrac{77}{-11}\right)$
22. $\dfrac{27-35}{4}$
23. $\dfrac{-10}{-3+(-2)}$
24. $8\cdot(-6)\cdot(-2)$
25. $(-7)\cdot(5)\cdot(-6)$
26. $(-7)\cdot(-8)\cdot(-9)$
27. $\dfrac{(-8)\cdot(-6)}{(-4)\cdot(3)}$
28. $3\cdot\dfrac{(-4)}{6}$
29. $\dfrac{-20+(8)}{4\cdot(-6)}$

III. Realizar las operaciones indicadas y reducir . (*No usar calculadora*)

30. $\dfrac{3}{16}+\dfrac{5}{16}$
31. $\dfrac{4}{7}-\dfrac{6}{7}$
32. $6\cdot\left(-\dfrac{3}{8}\right)$
33. $\dfrac{10}{11}+\dfrac{6}{33}-\dfrac{13}{66}$
34. $\left(\dfrac{2}{5}\right)\cdot\left(\dfrac{7}{8}\right)$
35. $4\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)$
36. $\left(\dfrac{4}{5}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)$

37 $\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}$

38. $\dfrac{x}{y}-\dfrac{x}{2}$
39. $\dfrac{x}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}}$

40 $\dfrac{5}{24}-\dfrac{3}{64}+\dfrac{7}{54}$

41. $\dfrac{3}{10}-\dfrac{5}{8}-\dfrac{9}{24}-\dfrac{1}{18}$

IV. Evaluar (si es posible) cada expresión .

42. $\dfrac{81-(90-9)}{5}$

44. $10\cdot(23-30+7)$

43. $\dfrac{(6\cdot x-4)-2\cdot(3\cdot x-2)}{\frac{1}{3}\cdot x-x+\frac{2}{3}\cdot x}$

45. $\dfrac{8}{-9+(6+3)}$

V. Sean m y n dos enteros, entonces . . .

- $2\cdot m$ y $2\cdot n$ son enteros pares (porque se pueden dividir entre 2)
- $(2\cdot m+1)$ y $(2\cdot n+1)$ son enteros impares (porque el 2 no es uno de sus divisores) .

Demostrar que . . .

- *La suma de dos enteros pares es un entero par.*
- *La suma de dos enteros impares es un entero par*
- *El producto de un entero par y cualquier otro entero es un entero par.*
- *El producto de dos enteros impares es impar .*

VI Usando las propiedades de los números reales, demostrar que si $A=-A$ entonces $A=0$

VII. Un trabajador puede realizar un trabajo en 7 días y otro trabajador puede hacer la misma faena en 5 días . Si ambos trabajan juntos, ¿qué fracción de la labor realizarán en 2 días ? .

VIII. Si 3.17 metros de alambre de cobre pesa 425 gramos, ¿cuánto pesarán 857 metros de ese alambre?

IX . Recordando que un número racional expresado en forma decimal termina o presenta un patrón de repetición infinito, usar la calculadora para encontrar la forma decimal de cada uno de los siguientes números racionales y dar el patrón de repetición:

46. $\dfrac{5}{8}$ 48. $\dfrac{41}{333}$ 50. $\dfrac{85}{750}$

47. $\dfrac{1}{3}$ 49. $\dfrac{6}{11}$ 51. $\dfrac{75}{91}$

X. Representar en forma racional (si es posible) los siguientes números expresados en forma decimal:

52. 3.125 54. $0.12912912....$ 56. $1.19444444.....$

53. $3.66666.....$ 55. $0.6363636......$ 57. $0.8021978021....$

XI. Usar la notación de desigualdad para escribir algebraicamente las siguientes expresiones:

58. A no es negativo.

59. B vale a lo más 5

60. x es un número negativo y vale por lo menos -3

61 x es un número positivo pero no vale más de 6

62 c vale a lo más 2 y b toma valores entre 2 y 3

63 el número x es mayor que el número y y ambos toman valores entre -3 y -5

Respuestas (Ejercicio 1.1)

I

1. conmutativa para la multiplicación
2. distributiva de la suma .
3. distributiva para la multiplicación
4. Elemento identidad para la suma
5. distributiva para la multiplicación
6. asociativa de la suma .
7. asociativa, inverso e identidad de suma
8. inverso para la multiplicación .
9. cerradura para la suma

II.

10. -6	11. 9	12. 2	13. -9
14. 6	15. 4	16. 9	17. -12
18. 2	19. 8	20. 40	21. -14
22. -2	23. 2	24. 96	25. 210
26. -504	27. -4	28. -2	29. $\frac{1}{2}$

III.

30. $\frac{1}{2}$	31. $\frac{-2}{7}$	32. $\frac{-9}{4}$	33. $\frac{59}{66}$
34. $\frac{7}{20}$	35. 3	36. $\frac{3}{10}$	37 $\frac{21}{20}$
38. $x\cdot\frac{(2-y)}{2\cdot y}$	39. $3\cdot x$	40 $\frac{503}{1728}$	41. $\frac{-34}{45}$

IV.

42. 0
43. indefinido (división por cero)
44. 0
45. indefinido (división por cero)

V.

i) $2\cdot m + 2\cdot n = 2\cdot(m+n)$ (*propiedad distributiva de la multiplicación*)

Por la propiedad de cerradura en los enteros, si m y n son enteros, entonces $(m+n)$ es otro entero p de modo que $2\cdot(m+n) = 2\cdot p$ y es evidente que *éste es un número par*

ii)
$$\begin{aligned}(2\cdot m+1)+(2\cdot n+1) &= 2\cdot m+2\cdot n+(1+1)\\ &= 2\cdot(m+n)+2 && (\textit{propiedades distributiva y asociativa})\\ &= 2\cdot(m+n+1) && (\textit{propiedad distributiva})\\ &= 2\cdot p\end{aligned}$$

La suma $m+n+1$ es otro número entero p y es evidente que $2\cdot p$ es un número par .

iii)
$$\begin{aligned}(2\cdot m+1)\cdot(2\cdot n+1) &= (2\cdot m+1)\cdot(2\cdot n)+(2\cdot m+1)\cdot(1) && (\textit{propiedad distributiva})\\ &= (2\cdot m)\cdot(2\cdot n)+(2\cdot n)+(2\cdot m+1) && (\textit{propiedad distributiva})\\ &= 4\cdot m\cdot n+2\cdot(n+m)+1 && (\textit{propiedad distributiva})\\ &= 2\cdot(2\cdot n\cdot m+n+m)+1\end{aligned}$$

La suma $2\cdot n\cdot m+n+m$ es otro número entero p (*cerradura*) y por lo tanto es evidente que el resultado tiene la forma $2\cdot p+1$ que es un número impar

VII. Los problemas relacionados con trabajo usualmente se resuelven con el siguiente modelo :

$$\left(razón_1\right)\cdot\left(tiempo_1\right) + \left(razón_2\right)\cdot\left(tiempo_2\right) + \ldots\ldots + \left(razón_n\right)\cdot\left(tiempo_n\right) = 1$$

donde

$$(razón)_k = \left(\frac{1}{tiempo\_del\_elemento\_k\_para\_realizar\_el\_trabajo\_entero}\right)$$

$$(tiempo)_k = (tiempo\_que\_trabajó\_el\_elemento\_k)$$

siempre y cuando cada elemento realice el trabajo a un ritmo constante .

En el problema, se tiene :

Trabajador # 1 : $razón_1 = \dfrac{1}{7\cdot dias}$; $tiempo_1 = 2\cdot dias$

Trabajador # 2 : $razón_2 = \dfrac{1}{5\cdot dias}$; $tiempo_1 = 2\cdot dias$

Usando el modelo anterior queda . . .

$$\left(\frac{1}{7\cdot dias}\right)\cdot 2\cdot dias + \left(\frac{1}{5\cdot dias}\right)\cdot 2\cdot dias = \frac{2}{7} + \frac{2}{5} = \frac{24}{35}$$

y en 2 días, ambos trabajadores habrán realizado 24 de 35 partes (68.6%) del trabajo total

VIII. Hágase la proporción :

$$\frac{(3.17)\cdot metros}{(0.425)\cdot kg} = \frac{(857)\cdot metros}{x}$$

y resolviendo para x resulta $x = \left(\dfrac{857\cdot metros}{3.17\cdot metros}\right)\cdot(0.425)\cdot kg = 114.89\cdot kg$

X. 52. $\dfrac{25}{8}$ 53. $\dfrac{33}{9}$ 54 $\dfrac{43}{333}$ 55. $\dfrac{7}{11}$

56. $\dfrac{43}{36}$ 57. $\dfrac{73}{91}$

XI. 58. $A \geq 0$ 59. $B \leq 5$ 60. $-3 \leq x < 0$ 61 $0 < x \leq 6$

62 $c \leq 2 < b < 3$ 63 $-5 < y < x < -3$

EJERCICIO 1.2 (*no usar calculadora*)

I. *Sumar*

1. $(4+5+3)+8$
2. $60-(8+7+5)$
3. $150-(14-6)$
4. $(8+4+3)+(6+5+11)$
5. $(9-6)+4$
6. $(5+6)+(7+8)$
7. $(6-8)+(4-7)$
8. $(-9+5)+(7-2)$
9. $56-(3+5-11)$
10. $(43-15)-19$
11. $(11-5)-(9-3)$
12. $(9-4)+(8-3)$
13. $(40-85)-(80-95)$
14. $(-13+6-4)-(-9+7-2)$
15. $(3-6+9)-2-(-8-7+1)$
16. $(14+5)-(6-4+3)+(6-4+2)$
17. $300-(5-2)-(9-3)+(5-4)$
18. $(7-5)+(13-4)-(17+3)+(18-9)$
19. $(15-7)+(6-1)-(9-6)+(19+8)-(3-1)$
20. $(-8-1)-(16-9)+4-1+9-6+(11-6)-(9-4)$
21. $-20-[-5-(-13+2)]$
22. $2-[(-15+7)-(14-23)]$
23. $(59-35)-[\,-14+[9-6-(3-5)]\,]$
24. $[(6-13)-(3-12)]-[(9-6)-(-6-7)]$
25. $8+[\,9-[-6-(-5-4)]\,]-[\,11-[7-(3-2)]\,]$
26. $(9+4)-(9-4)$
27. $(10+30)-(30-10)$
28. $(a+5)-(5-a)$
29. $(6+5)-(6-5)$
30. $(10-30)-(10+30)$
31. $(x+y)-(x-y)$

II. *Efectuar las operaciones indicadas*

32. $9+(2)\cdot(3)$
33. $(3)\cdot(4)-(5)\cdot(6)$

34. $15-(5)\cdot(3)-4$

35 $9-(6)\cdot(-4)-5$

36. $(-5)\cdot(-7)-3+(8)\cdot(-2)$

37. $(3)\cdot(-2)-(-7)\cdot(-4)+21$

38. $(5)\cdot(-1)+(7)\cdot(2)+(6)\cdot(-3)$

39. $(2)\cdot(7)-(5)\cdot(4)+(3)\cdot(6)-(2)\cdot(11)+13$

40. $(8-5+3)\cdot(4-6)$

41. $(2-5)\cdot 3+(4-1)\cdot(-6)$

42. $(-3)\cdot(13-7)+(-4)\cdot(3+6)$

43. $160-(3)\cdot(2-5)+(-6-3)\cdot(17-8)+(-5-3)\cdot(18-7)$

44. $[\,(5+3)\cdot 2+(6-2)\cdot 5\,]\cdot[8\cdot(6-3)]$

45. $-82+[\,20-3\cdot(4)+5\cdot[\,18-(6-1)\cdot 3+(5-2)\cdot 4\,]\,]$

46. $(12-7)\cdot(12+7)$

47. $(5+4)\cdot(5-4)$

48. $(10+30)\cdot(30-10)$

49. $(-3-5)\cdot(-3+5)$

50. $(-5+6)\cdot(6+5)$

51. $(a+3)\cdot(a-3)$

52. $(x+y)\cdot(x-y)$

III. *Hallar el m.c.d. de los números indicados en cada ejercicio*

53. 2168 , 7336 , 9184

54. 425 , 800 , 950

55. 1560 , 2400 , 5400

56. 465 , 744 , 837 , 2511

57. 153 , 357 , 187

58. 858 , 2288 , 3575

59. 136 , 204 , 221 , 272

60. 57 , 133 , 532 , 1824

61. ¿Cuál es la mayor longitud de una regla que cabe exactamente un número entero de veces en el largo de 850 cm y el ancho de 595 cm de una sala ?

62. Se tienen 3 extensiones de terreno de 3675, 1575 y 2275 metros cuadrados respectivamente y se desea repartirlos en parcelas iguales. ¿Cuál ha se ser la superficie de cada parcela para que el número de parcelas en cada terreno sea el menor posible ?

63. Se tienen tres varillas de 60 cm, 80 cm y 120 cm de longitud respectivamente. Se desea dividirlas en pedazos de la misma longitud sin que sobre ni falte nada.
Encontrar tres longitudes posibles para los pedazos

64. Se quieren envasar 161 kg , 253 kg y 207 kg de plomo en tres cajas, dividiéndolo en pequeños bloques iguales. ¿Cuál es el mayor peso para cada bloque y cuántos bloques habrá en cada caja?

IV. *Hallar el m.c.m. de los números indicados en cada ejercicio*

65. 5 , 7 , 10 , 14

66. 2 , 3 , 6, 12 , 50

67 14 , 38 , 114 , 56

68. 98 , 490 , 2401, 4900

69. 14 , 28 , 30 , 120

70. 529 , 1058 , 1587, 5290

71. 21 , 39 , 60, 200

72. 3 , 5 , 15, 21, 42

73. Hallar la menor distancia que se puede medir exactamente con tres reglas distintas de 2, 5 o 8 m de largo .

74. Tres aviones salen de la misma ciudad, el 1° cada 6 días, el 2° cada 9 días y el 3° cada 15 días. Si salen juntos de le mismo aeropuerto el 1 de marzo, ¿cuáles son las dos fechas más próximas en que vuelven a salir el mismo día ?

75. ¿Cuál es la menor longitud de una varilla que se puede dividir en pedazos iguales de 6, 10 o 14 cm de longitud sin que sobre ni falte nada y cuántos pedazos se obtendrían en cada caso ?

Respuestas (Ejercicio 1.2)

1. 20	2. 40	3. 142	4. 37
5. 7	6. 26	7. -5	8. 1
9. 59	10. 9	11. 0	12. 10
13. -30	14. -7	15. 18	16. 18
17. 292	18. 0	19. 35	20. -10
21. -26	22. 1	23. 33	24. -14
25. 9	26. 8	27. 20	28. $2\cdot a$
29. 10	30. -60	31. $2\cdot y$	32. 15
33. -18	34. -4	35 28	36. 16
37. -13	38. -9	39. 3	40. -12
41. -27	42. -54	43. 0	44. 864
45. 1	46. 95	47. 9	48. 800
49. -16	50. 11	51. a^2-9	52. x^2-y^2
53. 8	54. 25	55. 120	56. 93
57. 17	58. 143	59. 17	60. 19
61. $85\cdot cm$	62. $175\cdot m^2$	63. $5, 10 y 20$	64 $23\cdot kg$, $(7, 11, 9)$
65. 70	66. 300	67. 3192	68. 240100
69. 15960	70. 15870	71 54600	72. 210
73. $40\cdot m$	74. 29 de mayo y 27 de agosto		75. $210\cdot cm$, 35, 21 y 15 trozos

EJERCICIO 1.3 *Fracciones . (no usar calculadora)*

I. Reducir las siguientes fracciones a su mínima expresión . *Es decir, a una forma en la que el denominador y el numerador de la fracción* son números primos relativos .

REGLA *: Divídase el numerador y el denominador de la fracción entre su* mcm)

1. $\frac{98}{147}$ 2. $\frac{273}{637}$ 3. $\frac{332}{415}$ 4. $\frac{623}{979}$

5. $\frac{2002}{5005}$ 6. $\frac{1212}{1515}$ 7. $\frac{6170}{7404}$ 8. $\frac{2006}{7021}$

9. $\frac{7075}{11320}$ 10. $\frac{2401}{19208}$ 11. $\frac{8505}{13365}$ 12. $\frac{32828}{35092}$

13. $\frac{126014}{162018}$ 14. $\frac{40620}{69054}$ 15. $\frac{411}{685}$

II. Realizar las operaciones señaladas de fracciones y expresar el resultado en su mínima expresión:

1. $\frac{5}{4}\times\frac{8}{15}$ 2. $\frac{3}{4}\times\frac{16}{27}$ 3. $\frac{2}{3}\times\frac{4}{8}$ 4. $\frac{4}{3}\times\frac{6}{8}$

5. $\frac{4}{5}\times\frac{25}{12}$ 6. $\frac{20}{15}\times\frac{9}{12}$ 7. $\frac{9}{8}\times\frac{4}{3}$ 8. $\frac{6}{15}\times\frac{10}{8}$

9. $\frac{3}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{7}{9}$ 10. $\frac{3}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{9}{20}$ 11. $\frac{3}{8}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{10}$ 12. $\frac{9}{4}\times\frac{5}{8}\times\frac{10}{6}$

13. $\frac{2}{3}\times\frac{9}{6}\times\frac{4}{3}\times\frac{12}{16}$ 14. $\frac{4}{3}\times\frac{12}{8}\times\frac{9}{16}\times\frac{20}{6}$ 15. $\frac{3}{4}\times\frac{12}{8}\times\frac{16}{9}\times\frac{20}{6}$

16. $\frac{\left(\frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{15}{8}\right)}$ 17. $\frac{\left(\frac{4}{3}\right)}{\left(\frac{8}{9}\right)}$ 18. $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{4}{12}\right)}$ 19. $\frac{\left(\frac{7}{6}\right)}{\left(\frac{14}{3}\right)}$ 20. $\frac{\left(\frac{4}{5}\right)}{\left(\frac{16}{20}\right)}$ 21. $\frac{\left(\frac{12}{3}\right)}{\left(\frac{4}{15}\right)}$

22. $\frac{\left(\frac{24}{3}\right)}{\frac{4}{12}}$ 23 $\frac{\left(\frac{8}{15}\right)}{\frac{4}{3}}$ 24. $\frac{\left(\frac{32}{7}\right)}{\frac{8}{14}}$ 25 $\frac{\left(\frac{108}{48}\right)}{\frac{27}{72}}$ 26. $\frac{3}{2}\times\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$ 27. $\frac{1}{4}\times\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{12}}$

28 $\frac{5}{6}\times\frac{\frac{8}{5}}{\frac{4}{3}}$ 29. $\frac{9}{8}\times\frac{4}{3}\times\frac{\frac{3}{5}}{\frac{8}{4}}$ 30. $6\cdot\frac{\frac{10}{4}}{\frac{5}{12}}$

31. $\frac{2}{3}+2$ 32. $\frac{4}{3}+\frac{3}{2}$ 33. $\frac{5}{4}-\frac{2}{3}$ 34. $\frac{4}{5}+\frac{8}{3}$

35. $\frac{5}{2}-\frac{8}{9}$ 36. $\frac{3}{7}+\frac{4}{5}-1$ 37. $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}+\frac{5}{2}$ 38. $\frac{5}{4}-\frac{4}{3}-\frac{1}{8}$

39. $\frac{6}{5}+\frac{8}{3}-2$ 40. $\frac{5}{4}-\frac{9}{8}+\frac{7}{12}$ 41. $\frac{2}{3}-\frac{5}{6}-\frac{1}{12}$ 42. $\frac{3}{4}-\frac{5}{8}-\frac{7}{12}$

43. $\frac{7}{12}+\frac{5}{9}-\frac{4}{24}$ 44. $\frac{-5}{6}+\frac{15}{90}+\frac{4}{7}$ 45 $\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{12}-\frac{1}{14}$ 46 $\frac{1}{9}-\frac{1}{15}-\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$

47. $\frac{2}{40}+\frac{7}{80}-\frac{11}{36}+\frac{13}{72}$ 48. $\frac{15}{16}-\frac{1}{48}-\frac{1}{96}-\frac{15}{80}$ 49. $\frac{31}{108}-\frac{43}{120}+\frac{11}{150}$

Sumar las siguientes fracciones mixtas:

50. $\mathbf{4}\cdot\frac{3}{4}-\mathbf{2}\cdot\frac{1}{5}$ 51. $\mathbf{5}\cdot\frac{3}{2}+\mathbf{4}\cdot\frac{2}{3}$ 52. $\mathbf{3}\cdot\frac{7}{8}-\mathbf{2}\cdot\frac{3}{5}$ 53. $1-\mathbf{2}\cdot\frac{3}{4}+\mathbf{3}\cdot\frac{2}{7}$

54. $\frac{5}{6}-\mathbf{4}\cdot\frac{3}{2}-\mathbf{3}\cdot\frac{7}{8}$ 55. $\mathbf{8}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-5-\mathbf{3}\cdot\frac{2}{3}$ 56. $5-\mathbf{2}\cdot\frac{1}{2}-\mathbf{3}\cdot\frac{1}{3}-\mathbf{4}\cdot\frac{1}{4}+\mathbf{5}\cdot\frac{1}{5}$

57. Un hombre vende $\frac{1}{3}$ de su finca, alquila $\frac{1}{8}$ del resto y lo restante lo cultiva. ¿Qué porción de la finca inicial cultiva ?

58. Perdí $\frac{1}{5}$ de mi dinero y presté $\frac{1}{8}$. Qué parte de mi dinero me queda?

59. Perdí $\frac{1}{5}$ de mi dinero y presté $\frac{1}{8}$ de lo que me quedaba. ¿Qué parte de mi dinero me queda ?

60. Los $\frac{3}{8}$ de un pastel se los comió Juan, $\frac{2}{5}$ del resto se le da a Maria y lo que queda me toca a mi. ¿Qué parte del pastel me corresponde ?

61. Si compro 8 gomas de \$ $\frac{4}{5}$ cada una, pago con 3 metros de tela de \$ $\mathbf{2}\cdot\frac{1}{8}$ el metro. ¿Debo algo aún ?

62. La edad de Maria es $\frac{1}{6}$ de los $\frac{3}{4}$ de la edad de Juana. Si Juana tiene 24 años, ¿cuántos años tiene María ?

63. Si en 5 minutos estudio los $\frac{2}{3}$ de la página de un libro, ¿ en cuánto tiempo estudiaré 10 páginas ?

64. Un padre deja a su hijo mayor $\frac{1}{3}$ de su herencia , al segundo hijo le deja $\frac{2}{5}$ del resto, y al tercero los \$ 200 000 restantes. ¿A cuánto ascendía la herencia ?

III. Simplificar las siguientes fracciones complejas.

1. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}\right)}{\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{3}{8}\right)}$

2. $\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}-2\cdot\dfrac{1}{3}-1\right)}{\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{5}}$

3. $\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{5}-\dfrac{6}{3}\right)}{\dfrac{2}{4}+\dfrac{6}{8}-2}$

4. $\dfrac{\left(\dfrac{6}{5}-3\cdot\dfrac{3}{10}+7\cdot\dfrac{1}{3}\right)}{\left(4\cdot\dfrac{2}{3}-3\cdot\dfrac{4}{5}+2\cdot\dfrac{5}{4}\right)}$

5. $\dfrac{\left[2+\dfrac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{5}}{\left(\dfrac{4}{15}\right)}\right]}{\left[\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}}{\left(\dfrac{1}{6}\right)}-1\right]}$

6. $\dfrac{\left[1+\dfrac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{2}}{\left(\dfrac{1}{6}\right)}\right]}{\left[\dfrac{\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{3}}{\left(\dfrac{5}{6}\right)}-2\right]}$

7. $\dfrac{\left[\dfrac{1}{2}+\dfrac{\dfrac{5}{3}-\dfrac{1}{4}}{\left(\dfrac{4}{12}\right)}\right]}{\left[\dfrac{\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{3}}{\left(\dfrac{1}{6}\right)}-\dfrac{3}{2}\right]}$

8. $\dfrac{\left[\dfrac{2}{3}-\dfrac{\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{4}}{\left(\dfrac{3}{8}\right)}\right]}{\left[\dfrac{\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{3}}{\left(\dfrac{1}{24}\right)}-\dfrac{2}{3}\right]}$

IV. Determinar cuál de las fracciones dadas es mayor.

1. $\dfrac{25}{15}\ ,\ \dfrac{24}{14}$
2. $\dfrac{9}{27}\ ,\ \dfrac{8}{26}$
3. $\dfrac{28}{63}\ ,\ \dfrac{5}{9}$
4. $\dfrac{24}{32}\ ,\ \dfrac{4}{5}$
5. $\dfrac{48}{56}\ ,\ \dfrac{7}{8}$
6. $\dfrac{200}{150}\ ,\ \dfrac{5}{4}$
7. $\dfrac{96}{84}\ ,\ \dfrac{7}{6}$
8. $\dfrac{120}{64}\ ,\ \dfrac{16}{9}$
9. $\dfrac{240}{320}\ ,\ \dfrac{4}{5}$
10. $\dfrac{684}{1026}\ ,\ \dfrac{3}{4}$
11. $\dfrac{20}{16}\ ,\ \dfrac{4}{3}$
12. $\dfrac{96}{24}\ ,\ \dfrac{104}{32}$
13. $\dfrac{28}{64}\ ,\ \dfrac{3}{4}$
14. $\dfrac{44}{32}\ ,\ \dfrac{12}{9}$
15. $\dfrac{286}{520}\ ,\ \dfrac{12}{21}$

Respuestas (*Ejercicio* 1.3)

I.

1. $\frac{2}{3}$ 2. $\frac{3}{7}$ 3. $\frac{4}{5}$ 4. $\frac{7}{11}$ 5. $\frac{2}{5}$ 6. $\frac{4}{5}$

7. $\frac{5}{6}$ 8. $\frac{2}{7}$ 9. $\frac{5}{8}$ 10. $\frac{1}{8}$ 11. $\frac{7}{11}$ 12. $\frac{29}{31}$

13. $\frac{7}{9}$ 14. $\frac{10}{17}$ 15. $\frac{3}{5}$

II.

1. $\frac{2}{3}$ 2. $\frac{4}{9}$ 3. $\frac{1}{3}$ 4. 1 5. $\frac{5}{3}$ 6. 1

7. $\frac{3}{2}$ 8. $\frac{1}{2}$ 9. $\frac{14}{15}$ 10. $\frac{9}{56}$ 11. $\frac{1}{12}$ 12. $\frac{75}{32}$

13. 1 14. $\frac{15}{4}$ 15. $\frac{20}{3}$ 16. $\frac{2}{3}$ 17. $\frac{3}{2}$ 18. 2

19. $\frac{1}{4}$ 20. 1 21. 15 22. 24 23 $\frac{2}{5}$ 24. 8

25. 6 26. $\frac{5}{4}$ 27. 1 28 1 29. $\frac{9}{20}$ 30. 36

31. $\frac{8}{3}$ 32. $\frac{17}{6}$ 33. $\frac{7}{12}$ 34. $\frac{52}{15}$ 35. $\frac{29}{18}$ 36. $\frac{8}{35}$

37. $\frac{31}{12}$ 38. $\frac{-5}{24}$ 39. $\frac{28}{15}$ 40. $\frac{17}{24}$ 41. $\frac{-1}{4}$ 42. $\frac{-11}{24}$

43. $\frac{35}{36}$ 44. $\frac{-2}{21}$ 45. $\frac{1}{28}$ 46. $\frac{-4}{45}$ 47. $\frac{1}{80}$ 48. $\frac{23}{32}$

49. $\frac{11}{5400}$ 50. $\mathbf{2}\cdot\frac{11}{20}$ 51. $\mathbf{11}\cdot\frac{1}{6}$ 52. $\mathbf{1}\cdot\frac{11}{40}$ 53. $\mathbf{1}\cdot\frac{15}{28}$ 54. $\mathbf{6}\cdot\frac{1}{24}$

55. $\frac{-13}{24}$ 56. $\frac{7}{60}$ 57. $\frac{7}{12}$ 58. $\frac{27}{40}$ 59. $\frac{7}{10}$ 60. $\frac{3}{8}$

61. Si, $\frac{1}{40}$ 62. 3 años 63. $1\cdot h, 15\cdot min$ 64. \$ 500 000

III.

1. 50
2. $\frac{-64}{87}$
3. $\frac{-2}{5}$
4. $\frac{79}{83}$
5. $\frac{-1}{8}$
6. $\frac{24}{5}$
7. $\frac{19}{14}$
8. -4

IV.

1. $\frac{25}{15} < \frac{24}{14}$
2. $\frac{9}{27} > \frac{8}{26}$
3. $\frac{28}{63} < \frac{5}{9}$
4. $\frac{24}{32} < \frac{4}{5}$
5. $\frac{48}{56} < \frac{7}{8}$
6. $\frac{200}{150} > \frac{5}{4}$
7. $\frac{96}{84} < \frac{7}{6}$
8. $\frac{120}{64} > \frac{16}{9}$
9. $\frac{240}{320} < \frac{4}{5}$
10. $\frac{684}{1026} < \frac{3}{4}$
11. $\frac{20}{16} < \frac{4}{3}$
12. $\frac{96}{24} > \frac{104}{32}$
13. $\frac{28}{64} < \frac{3}{4}$
14. $\frac{44}{32} > \frac{12}{9}$
15. $\frac{286}{520} < \frac{12}{21}$