ALGEBRA ELEMENTAL

OPERACIONES ALGEBRÁICAS ELEMENTALES

INDICE

CAPÍTULO II : OPERACIONES ALGEBRÁICAS ELEMENTALES

2.1 *Definiciones básicas* .

literal : *Es un símbolo que representa un valor numérico*. Puede ser cualquier letra del alfabeto latino :

$A, a, B, b, C, c, D, d, \ldots, Z, z$

o del alfabeto griego :

$A, \alpha, B, \beta, \Gamma, \gamma, \Delta, \delta, \ldots, \Omega, \omega$

expresión algebraica : Es un grupo de números y letras combinados entre si mediante una o más de las operaciones fundamentales (*suma , resta , multiplicación, división,potencias o raices*) .

término : Es un número, una letra, o varios números y letras *combinados entre si mediante una multiplicación y/o una división* .

Un término es todo grupo de letras y números que en una expresión algebraica está separado de los demás grupos por un signo de suma ($+$) o de substracción ($-$).

El signo de un término es el signo que lo precede . Usualmente, si el primer término de una expresión es positivo, se omite su signo (es implícito).

Ejemplo : La expresión algebraica : $3 \cdot a^2 \cdot b - 2 \cdot b \cdot c + 5 \cdot c^3$ tiene tres términos :

$3 \cdot a^2 \cdot b$, $-2 \cdot b \cdot c$ y $5 \cdot c^3$.

paréntesis : Los paréntesis indican prioridad, lo cual significa que primero se deben realizar las operaciones con los términos que quedan comprendidos entre el paréntesis. La suma de dos o más números o letras encerrada entre paréntesis se puede considerar un sólo término (*término compuesto*).

Ejemplo : En la expresión algebráica : $a^3 - (3 \cdot a + b) \cdot \dfrac{(a-b)}{\left(a^2 + b^2\right)}$ los símbolos

$(3 \cdot a + b)$, $(a - b)$ y $\left(a^2 + b^2\right)$ son tres cantidades individuales con dos términos cada una ; pero además como $(3 \cdot a + b) \cdot \dfrac{(a-b)}{\left(a^2 + b^2\right)}$ sólo implica multiplicación y división entre esas cantidades, representa por lo tanto un sólo término de la expresión inicial, la cual solo tiene otro término: a^3

coeficiente : Es el *número* que multiplica a la(s) literal(es) de un término.
Si el término sólo contiene literales, el coeficiente es implícito y vale 1 .

Ejemplo : En $4 \cdot x^3 \cdot y$ el número $+4$ es el coeficiente del término $x^3 \cdot y$

En $-a \cdot x^2 \cdot \sqrt{y}$ el número -1 es el coeficiente del término $a \cdot x^2 \cdot \sqrt{y}$

términos semejantes : Contienen *exactamente las mismas letras elevadas a las mismas potencias* .
Los términos semejantes sólo difieren en sus coeficientes .

Ejemplos : Son términos semejantes : $2 \cdot a^3 \cdot b \cdot c^2$ y $\frac{-1}{8} \cdot \left(a^3 \cdot b \cdot c^2\right)$

$\frac{2}{3} \cdot a^2 \cdot x^3 \cdot \sqrt{c}$ y $-\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot a^2 \cdot x^3 \cdot \sqrt{c}$

(*nótese que el símbolo* π *representa una constante conocida*)

En cambio, no son términos semejantes . . . $3 \cdot w^2 \cdot z^3$ y $\frac{1}{2} \cdot w \cdot z^3$

pues aunque poseen las mismas literales, no tienen las mismas potencias.

Multinomios : Si una expresión algebraica tiene *un sólo término* se llama *monomio* .
Si tiene *exactamente dos términos* se denomina *binomio* .
Si tiene *exactamente tres términos* , recibe el nombre de *trinomio* y en general , las expresiones que contienen *más de tres términos* se llaman *multinomios* .

polinomio : Es un multinomio muy particular que tiene la forma general :

$$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_n \cdot x^n$$

en la cual :

- Los coeficientes a_0 , a_1 , a_2 , . . . , a_n son ***constantes***
- n *es un número entero positivo* llamado el ***grado*** del polinomio.
- x *es la literal del polinomio* (pueden aparecer más literales en cada término del polinomio o x puede representar una expresión algebraica completa)

De modo que *un polinomio sólo tiene potencias enteras y positivas en sus literales*

2.2 Suma de expresiones algebráicas.

Dos o más expresiones algebráicas *se pueden sumar sólo si contienen términos semejantes.*

Para sumar dos o más expresiones, *se suman los coeficientes de los términos semejantes y se dejan sin cambio las literales.*

Ejemplos . a) $-3\cdot x^3\cdot y^2 + 2\cdot x^3\cdot y^2 = (-3+2)\cdot x^3\cdot y^2 = -x^3\cdot y^2$

b) $\frac{3}{5}\cdot a\cdot b^2\cdot c - \frac{7}{2}\cdot a\cdot b^2\cdot c + 2\cdot a\cdot b^2\cdot c = \left(\frac{3}{5} - \frac{7}{2} + 2\right)\cdot a\cdot b^2\cdot c = -\frac{9}{10}\cdot a\cdot b^2\cdot c$

Cuando los términos no son semejantes, sólo se indica la suma simbólicamente colocando un signo más $(+)$ entre ellos.

Por ejemplo para sumar $5\cdot x\cdot a\cdot h^2$ con $-3\cdot x\cdot z^3\cdot a$, simplemente escribimos:

$$5\cdot x\cdot a\cdot h^2 + \left(-3\cdot x\cdot z^3\cdot a\right)$$

Todas las propiedades que valen para la suma de los números reales (*conmutativa , asociativa , inverso , etc .*) siguen siendo válidas para sumar expresiones algebraicas.

Por ejemplo , para sumar las expresiones : $\left(-4\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot y - 6\cdot y^3\right)$; $\left(4\cdot x\cdot y + 2\cdot x^2 + y^3\right)$ y $\left(-3\cdot y^3 - x\cdot y - 5\cdot x^2\right)$ se conmutan y asocian adecuadamente sus términos semejantes para que se sumen en columnas separadas :

$$\left(\begin{array}{c} -4\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot y - 6\cdot y^3 \\ 2\cdot x^2 + 4\cdot x\cdot y + y^3 \\ -5\cdot x^2 - x\cdot y - 3\cdot y^3 \\ \hline -7\cdot x^2 + 5\cdot x\cdot y - 8\cdot y^3 \end{array}\right)$$

Dado que una substracción equivale a una suma con el inverso aditivo del sustraendo, *para restar expresiones algebraicas, sólo se cambia el signo de cada término en la expresión que se resta y se procede como en la adición.*

Ejemplo . Restar $\left(-4\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot y - 6\cdot y^3\right)$ de $\left(-5\cdot x^2 - x\cdot y - 3\cdot y^3\right)$.

Solución :

La diferencia : $\left(-5\cdot x^2 - x\cdot y - 3\cdot y^3\right) - \left(-4\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot y - 6\cdot y^3\right)$ equivale a la suma . . .

$$\left(-5\cdot x^2 - x\cdot y - 3\cdot y^3\right) + \left(4\cdot x^2 - 2\cdot x\cdot y + 6\cdot y^3\right)$$

de modo que sumando términos semejantes resulta . . .

$$= (-5+4)\cdot x^2 + (-1-2)\cdot x\cdot y + (-3+6)\cdot y^3 \quad = -x^2 - 3\cdot x\cdot y + 3\cdot y^3$$

EJERCICIO 2.1 (*No usar calculadora*)

Efectuar las operaciones indicadas en los ejercicios 1 a 20 .

1. $3 - 10 + 2$
2. $9 - 8 - 6 + 2$
3. $13 - 9 + 7 - 12$
4. $6 - 15 + 17 - 3$
5. $2 + (-4) - (-3)$
6. $8 - (-9) - (-3)$
7. $-4 + 7 - 8$
8. $-(-14) + (-3) - (-7)$
9. $-12 - 7 + (-16)$
10. $8 - 4 - 3 + (-5)$
11. $-(-23) - 8 - 9 - 5 + (-3)$
12. $7 - (2) - (-4) + (-8)$
13. $3\cdot x - 4\cdot x + 2\cdot x$
14. $9\cdot a - 5\cdot a + 3\cdot a$
15. $-(3\cdot b) + 5\cdot b - 7\cdot b$
16. $8\cdot y - 6\cdot y + 3\cdot y$
17. $3\cdot a - b - 6\cdot a + 5\cdot b$
18. $-8\cdot x + 2\cdot z + 5\cdot z - 9\cdot z$
19. $-5\cdot x - 7\cdot a + 3\cdot x - a$
20. $8\cdot x - y - 2\cdot x + 3\cdot y - x - 2\cdot y$

En los ejercicios 21 a 26 , encontrar la suma de las expresiones algebraicas

21. $(3\cdot x - 2\cdot y + 5\cdot z) + (-2\cdot z + 5\cdot y - 8\cdot x) + (-2\cdot x - 9\cdot z - 3\cdot y)$
22. $(-4\cdot r + 2\cdot s - 6\cdot t) + (-8\cdot t + 3\cdot r - 5\cdot s) + (4\cdot s + 6\cdot t - 2\cdot r)$
23. $(-2\cdot a + 3\cdot b + 7\cdot c) + (5\cdot a - 8\cdot b - 9\cdot c) + (-7\cdot a - 9\cdot b + 4\cdot c)$
24. $(-5\cdot t + 3\cdot u - 4\cdot v - 6\cdot w) + (8\cdot w + 3\cdot v - 6\cdot u + 2\cdot t) + (-u + 2\cdot v + 3\cdot w - 3\cdot t)$
25. $8\cdot x + 3\cdot y - 5\cdot z - 4\cdot w + 7\cdot y - 3\cdot w + 5\cdot y - 7\cdot z + 9\cdot y - 4\cdot x - 3\cdot z - 2\cdot w + (-3\cdot z + w - y + 8\cdot x)$

26. $\frac{2}{3}\cdot x-\frac{4}{5}\cdot y-\frac{1}{2}\cdot a+\left(-\frac{3}{4}\cdot x+\frac{3}{5}\cdot a-\frac{2}{3}\cdot y\right)+3\cdot a-2\cdot x+4\cdot y$

Realizar la substracción de las expresiones indicada en los ejercicios 27 a 32 .

27. $3\cdot a-4\cdot b+2\cdot c-(5\cdot a-3\cdot b-4\cdot c)$

28. $-4\cdot x-5\cdot y-2\cdot z-(7\cdot x-9\cdot z+2\cdot y)$

29. $\frac{3}{4}\cdot x-\frac{2}{3}\cdot y-z-\left(x-\frac{1}{4}\cdot y-\frac{2}{3}\cdot z\right)$

30. $\frac{7}{2}\cdot a-\frac{4}{3}\cdot b-\frac{1}{5}\cdot c-(3\cdot a-2\cdot b+4\cdot c)$

31. $\frac{3}{2}\cdot u-\frac{2}{3}\cdot v+\frac{3}{5}\cdot w-\left(-\frac{3}{8}\cdot u-\frac{5}{2}\cdot v-\frac{3}{10}\cdot w\right)$

32. $-4\cdot t+2\cdot u-8\cdot v-5\cdot w-(6\cdot v+3\cdot w-t+7\cdot u)$

Respuestas : EJERCICIO 2.1

1. -5
2. -3
3. -1
4. 5
5. 1
6. 20
7. -5
8. 18
9. -35
10. -4
11. -2
12. 1
13. x
14. $7\cdot a$
15. $-5\cdot b$
16. $5\cdot y$
17. $-3\cdot a+4\cdot b$
18. $-8\cdot x-2\cdot z$
19. $-2\cdot x-8\cdot a$
20. $5\cdot x$
21. $-7\cdot x-6\cdot z$
22. $-3\cdot r+s-8\cdot t$
23. $-4\cdot a-14\cdot b+2\cdot c$
24. $-6\cdot t-4\cdot u+v+5\cdot w$
25. $12\cdot x+23\cdot y-18\cdot z-8\cdot w$
26. $\frac{-25}{12}\cdot x+\frac{38}{15}\cdot y+\frac{31}{10}\cdot a$
27. $-2\cdot a-b+6\cdot c$
28. $-11\cdot x-7\cdot y+7\cdot z$
29. $\frac{-1}{4}\cdot x-\frac{5}{12}\cdot y-\frac{1}{3}\cdot z$
30. $\frac{1}{2}\cdot a+\frac{2}{3}\cdot b-\frac{21}{5}\cdot c$
31. $\frac{15}{8}\cdot u+\frac{11}{6}\cdot v+\frac{9}{10}\cdot w$
32. $-3\cdot t-5\cdot u-14\cdot v-8\cdot w$

2.3 Simbolos de agrupación.

Los símbolos que se utilizan en el álgebra para agrupar expresiones son :

los paréntesis ( )
los corchetes [ ]
las llaves { }

Usualmente, si en una expresión algebráica no hay símbolos de agrupación, el orden de prioridad natural en que se deben realizar las operaciones es el siguiente :

1° potencias y raíces
2° multiplicaciones y divisiones.
3° sumas y restas.

Los símbolos de agrupación se utilizan para ***alterar*** ese orden natural.

Las operaciones indicadas dentro de un símbolo de agrupación tienen prioridad (es decir, se deben realizar primero que las otras operaciones fuera del símbolo)

Ejemplos :

a) Las expresiones : $3\cdot a\cdot b^2 + 2$ y $3\cdot a\cdot\left(b^2 + 2\right)$ contienen los mismos símbolos ; sin embargo, *son completamente distintas*, pues en $3\cdot a\cdot b^2 + 2$ primero se realiza el producto $3\cdot a\cdot b^2$ y al resultado se le suma el 2 de acuerdo al orden natural, mientras que en $3\cdot a\cdot\left(b^2 + 2\right)$, primero se hace la suma $b^2 + 2$ y el resultado obtenido se multiplica por $3\cdot a$.

b) La expresión: $(3\cdot a - 4\cdot b + c) + (-2\cdot a + 8\cdot b - 3\cdot c)$ significa que el número representado dentro del primer paréntesis debe sumarse al número representado por la expresión dentro del segundo paréntesis .

c) La expresión: $\left(\frac{5}{3}\cdot x - 2\cdot y + \frac{1}{4}\cdot z\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot x - \frac{3}{5}\cdot y - 2\cdot z\right)$ indica que el número representado por la expresión del segundo paréntesis debe restarse del número representado por la expresión del primer paréntesis .

d) En $\left(9\cdot x^3 - 8\cdot y^3\right) - (3\cdot x - 2\cdot y)\cdot(2\cdot x + 3\cdot y)$, el número $(3\cdot x - 2\cdot y)$ debe multiplicarse primero por el número $(2\cdot x + 3\cdot y)$ y después , del producto obtenido, debe restarse el número $\left(9\cdot x^3 - 8\cdot y^3\right)$

Reglas de los símbolos de agrupación :

1° Cuando un signo positivo precede a un símbolo de agrupación, ***se puede omitir el símbolo de agrupación . Cada término en la expresión conserva su signo.***

Ejemplo :

$$(3\cdot a - 4\cdot b + c) + (-2\cdot a + 8\cdot b - 3\cdot c) = 3\cdot a - 4\cdot b + c - 2\cdot a + 8\cdot b - 3\cdot c$$
$$= 3\cdot a - 2\cdot a - 4\cdot b + 8\cdot b + c - 3\cdot c$$
$$= a + 4\cdot b - 2\cdot c$$

Aquí se han usado las propiedades conmutativa y asociativa de la suma para obtener el resultado final

2° Cuando un signo negativo precede a un símbolo de agrupación, ***se puede omitir el símbolo de agrupación <u>invirtiendo</u> el signo de todos los términos que estén dentro*** del símbolo de agrupación

Ejemplo :

$$\left(\frac{5}{3}\cdot x - 2\cdot y + \frac{1}{4}\cdot z\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot x - \frac{3}{5}\cdot y - 2\cdot z\right) = \frac{5}{3}\cdot x - 2\cdot y + \frac{1}{4}\cdot z - \frac{1}{2}\cdot x + \frac{3}{5}\cdot y + 2\cdot z$$

$$= \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\right)\cdot x + \left(-2 + \frac{3}{5}\right)\cdot y + \left(\frac{1}{4} + 2\right)\cdot z$$

$$= \frac{7}{6}\cdot x - \frac{7}{5}\cdot y + \frac{9}{4}\cdot z$$

3° ***Cuando es necesario insertar un símbolo de agrupación precedido por un signo menos en una expresión algebraica, se debe invertir el signo de cada uno de los términos que tal símbolo contenga.***

Ejemplo :

$$\frac{4}{3}\cdot x^3\cdot y + \frac{1}{2}\cdot a^2\cdot b^3 - 5\cdot z\cdot w^2 = \frac{4}{3}\cdot x^3\cdot y - \left(-\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot b^3 + 5\cdot z\cdot w^2\right)$$

4° ***Cuando una expresión algebráica contenga símbolos de agrupación encerrados por otros símbolos de agrupación, la prioridad va desde dentro hacia afuera.***

Es decir, para eliminar los símbolos de agrupación se empieza con el más interior y se termina con el exterior.

Ejemplo 1. Eliminar los símbolos de agrupación de la expresión :

$$3 \cdot x - [2 \cdot x + [3 \cdot x - 2 \cdot y - (5 \cdot x - 4 \cdot y) - 2 \cdot x] - 5 \cdot y]$$

Solución : Quitando primero el paréntesis más interior se obtiene :

$$3 \cdot x - [2 \cdot x + (3 \cdot x - 2 \cdot y - 5 \cdot x + 4 \cdot y - 2 \cdot x) - 5 \cdot y]$$

Sumando los términos semejantes del interior : $3 \cdot x - [2 \cdot x + (-4 \cdot x + 2 \cdot y) - 5 \cdot y]$

Quitando ahora el paréntesis más interior resulta : $3 \cdot x - (2 \cdot x - 4 \cdot x + 2 \cdot y - 5 \cdot y)$

Sumando los términos semejantes del interior: $3 \cdot x - (-2 \cdot x - 3 \cdot y)$

quitando el último paréntesis . . . $3 \cdot x + 2 \cdot x + 3 \cdot y$

que se reduce a : $5 \cdot x + 3 \cdot y$

EJERCICIO 2.2

Eliminar los símbolos de agrupación y combinar los términos semejantes

1. $4 \cdot (3 \cdot x - 2 \cdot y + 4 \cdot z) - 3 \cdot (2 \cdot x + 4 \cdot y - 3 \cdot z)$
2. $-3 \cdot (2 \cdot a + 3 \cdot b - 4 \cdot c) + 2 \cdot (-4 \cdot a + b - c)$
3. $-8 \cdot (-6 \cdot a - 3 \cdot b + 2 \cdot c) - 7 \cdot (5 \cdot a - 2 \cdot b + 3 \cdot c)$
4. $3 \cdot (6 \cdot u - 4 \cdot v - 5 \cdot w) - 5 \cdot (7 \cdot u - 3 \cdot v - 4 \cdot w)$
5. $4 \cdot a - 5 \cdot [a - 2 \cdot (2 \cdot b - 3 \cdot c) - 2 \cdot b]$
6. $2 \cdot r - 2 \cdot [4 \cdot r - 2 \cdot [s - t + 4 \cdot (r - s + 2 \cdot t) - 3 \cdot r] + 2 \cdot s]$
7. $4 \cdot x^2 - \left[\left[2 \cdot x^2 - 2 \cdot x \cdot (x - 3 \cdot y + 1) - 3 \cdot x^2 + 3 \cdot y\right] - \left[3 \cdot y \cdot (2 \cdot x - 2 \cdot y + 1) + 6 \cdot y^2\right] + 2 \cdot x\right]$
8. $33 \cdot x^2 - 3 \cdot [x - 2 \cdot x \cdot [x - 7 \cdot (x - 2) - 3] + 2] - 60 \cdot x$

Respuestas : EJERCICIO 2.2

1. $6\cdot x - 20\cdot y + 25\cdot z$
2. $-14\cdot a - 7\cdot b + 10\cdot c$
3. $13\cdot a + 38\cdot b - 37\cdot c$
4. $-17\cdot u + 3\cdot v + 5\cdot w$
5. $-a + 30\cdot b - 30\cdot c$
6. $-2\cdot r - 16\cdot s + 28\cdot t$
7. $7\cdot x^2$
8. $-3\cdot x^2 + 3\cdot x - 6$

2.4 Multiplicación de expresiones algebraicas.

El producto de dos números a y b se representa en cualquiera de las siguientes formas :

$$a \times b \quad , \quad (a)\,(b) \quad , \quad a\cdot b \quad \text{o simplemente} \quad ab$$

Cada uno de los números que aparecen en el producto se llama *factor* .

Debido a la propiedad de identidad para la multiplicación, cualquier número m es igual a $m \times 1$, resulta asi que todo número es un factor de sí mismo.

el producto de un número b por sí mismo se escribe $b \times b = b^2$ y se pronuncia "b *al cuadrado*" o "b *cuadrada*" .

el triple producto $b \times b \times b$ se escribe b^3 y se llama "b *cúbica*" o "b *al cubo*" .

el cuádruple producto $b \times b \times b \times b$ se escribe b^4 y se llama "b *cuarta*" o "b *a la cuatro*" .

en forma general, si el número b se multiplica por sí mismo n veces, se escribe b^n y se llama "**potencia n-ésima de** b " o "b **a la n**"

$$(b \times b \times b \times b \ldots\ldots\ldots \times b) = b^n \qquad [n \text{ factores}]$$

Al número b se le llama **base** y al **número entero positivo n** se le llama **exponente** .

Como consecuencia de ésta definición se tienen las siguientes reglas para los productos que contienen potencias de números. . .

LEYES DE EXPONENTES PARA LA MULTIPLICACIÓN

I	$b^n \cdot b^m = b^{(n+m)}$	***" El producto de potencias con la misma base es la base elevada a la suma de los exponentes "*** .
II	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	***" El producto de potencias con distinta base y el mismo exponente es el producto de las bases elevado al exponente común ".***
III	$\left(b^n\right)^m = b^{n \cdot m}$	***" El exponente equivalente para una potencia de una potencia, es el producto de los exponentes iniciales ".***

DEMOSTRACIONES:

LEY I

$$\left(b^n \times b^m\right) = \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot b)}_{[\ n\ factores\ ]} \times \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot b)}_{[\ m\ factores\ ]}$$

usando la propiedad asociativa de la multiplicación, el producto anterior es equivalente a :

$$\left(b^n \times b^m\right) = \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot b)}_{[\ (n+m)\ factores\ ]}$$

Ahora, por la definición de potencia de un número, éste producto es la potencia $(n+m)$ del número b , es decir . . .

$$\left(b^n \times b^m\right) = b^{(n+m)}$$

LEY II

$$\left(a^n \times b^n\right) = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot a)}_{[\ n\ factores\ ]} \times \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot b)}_{[\ n\ factores\ ]}$$

Usando la propiedad asociativa de la multiplicación, el producto anterior es equivalente a :

$$\left(a^n \times b^n\right) = \underbrace{[(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot (a \cdot b)]}_{[\ (n+m)\ factores\ ]}$$

donde cada factor de a^n se ha asociado con un factor de b^n .
Ahora, por la definición de potencia, se sigue que éste último producto es la potencia *n-ésima* del número $a \cdot b$, es decir . . . $\left(a^n \times b^n\right) = (a \cdot b)^n$

LEY III El número $\left(b^n\right)^m$ se puede escribir como:

$$\left(b^n\right)^m = b^n \cdot b^n \cdot b^n \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot b^n$$

[m *factores*]

Usando ahora la ley I anterior, este producto es equivalente a : $b^{(n+n+n+\ldots\ldots+n)}$
donde hay m términos en el exponente.
Pero el número n sumado m veces equivale al producto $n \cdot m$ y se sigue que . . .

$$\left(b^n\right)^m = (b)^{n \cdot m}$$

***Nota*:** *Es importante reconocer la diferencia entre formas exponenciales como* $(-2)^4$ *y* -2^4 *, por ejemplo, porque en* $(-2)^4$ *el paréntesis indica que la potencia se aplica tanto al signo negativo como al número* 2*, resultando* $(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 16$ *; en cambio en* -2^4 *sólo se aplica la potencia al número* 2 *, resultando* $-2^4 = -(2)\cdot(2)\cdot(2)\cdot(2) = -16$.
Similarmente, en $(5 \cdot x)^3$*, la potencia se aplica tanto al número* 5 *como a la variable* x *; mientras que en el término* $5 \cdot x^3$ *la potencia se aplica sólo a* x .

Todas las propiedades de la multiplicación para los números reales se aplican al producto de dos o más expresiones algebraicas, en particular la *propiedad distributiva* y *la regla de los signos para la multiplicación*, teniéndose los siguientes casos particulares. . .

2.4 a) ***Multiplicación de monomios***.

Para multiplicar dos o más monomios, *se multiplican sus coeficientes y sus literales .*
Si hay literales comunes, se elevan a la potencia que resulte aplicando las leyes de los exponentes .

Ejemplos .

a) $x^5 \cdot x^2 = x^{(5+2)} = \boxed{x^7}$

b) $\left(4 \cdot a^3 \cdot y^2\right) \cdot \left(-5 \cdot a \cdot y^3\right) = (4)\cdot(-5)\cdot a^{(3+1)} \cdot y^{(2+3)} = \boxed{-20 \cdot a^4 \cdot y^5}$

c) $\left(-\frac{2}{3}\cdot x^5\cdot a^2\cdot z\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot b^3\cdot z^2\cdot a\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot b^3\cdot x^5\cdot a^{2+1}\cdot z^{1+2} = \boxed{\frac{1}{6}\cdot x^5\cdot b^3\cdot a^3\cdot z^3}$

d) $\left(-2\cdot a\cdot b^2\right)^3\cdot\left(-3\cdot a^3\cdot b\right)^2 = \left[(-2)^3\cdot a^3\cdot\left(b^2\right)^3\right]\cdot\left[(-3)^2\cdot\left(a^3\right)^2\cdot b^2\right]$ [Ley II]

$= \left(-8\cdot a^3\cdot b^6\right)\cdot\left(9\cdot a^6\cdot b^2\right)$ [Ley III]

$= \boxed{-72\cdot a^9\cdot b^8}$ [Ley I]

2.4 b) ***Multiplicación de un monomio por un multinomio.***

De acuerdo con la propiedad distributiva de la multiplicación :

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$$

se deduce que el producto de un monomio por una expresión algebraica que contenga dos o más términos (un multinomio) *es la suma de los productos del monomio por cada uno de los términos del multinomio* .

Ejemplo .

$\left(2\cdot x^3\cdot z\right)\cdot\left[5\cdot x\cdot z^3 - 3\cdot x^2 + \left(-3\cdot z^4\right)^3 - 6\right] =$

$= \left(2\cdot x^3\cdot z\right)\cdot\left(5\cdot x\cdot z^3\right) + \left(2\cdot x^3\cdot z\right)\cdot\left(-3\cdot x^2\right) + \left(2\cdot x^3\cdot z\right)\cdot\left(-3\cdot z^4\right)^3 + \left(2\cdot x^3\cdot z\right)\cdot(-6)$

$= (2)\cdot(5)\cdot x^{3+1}\cdot z^{1+3} + (2)\cdot(-3)\cdot x^{3+2}\cdot z + \left(2\cdot x^3\cdot z\right)\cdot\left(-27\cdot z^{12}\right) + (2)\cdot(-6)\cdot x^3\cdot z$

$= 10\cdot x^4\cdot z^4 - 6\cdot x^5\cdot z - 54\cdot x^3\cdot z^{13} - 12\cdot x^3\cdot z$

2.4 c) ***Multiplicación de dos multinomios.***

De la propiedad distributiva de la multiplicación, se deduce también que el producto de dos multinomios

"es la suma de los productos de cada término de un multinomio por cada término del otro multinomio"

Es conveniente realizar éste producto en el siguiente orden:

- ***escribir los multinomios que se multiplican uno debajo del otro.***
- ***escribir en renglones separados los productos obtenidos de la multiplicación de cada término del multinomio inferior por el multinomio superior.***
- ***ordenar los renglones obtenidos en el paso anterior escribiendo los términos semejantes en columnas separadas para facilitar su suma.***

Ejemplo 2. *Multiplicar* $\left(-2\cdot a^3+3\cdot a^2\cdot b-a\cdot b^2-4\cdot b^3\right)$ *por* $\left(3\cdot a^2-a\cdot b-2\cdot b^2\right)$

Solución:

$$\begin{array}{rcr}
\left(-2\cdot a^3+3\cdot a^2\cdot b-a\cdot b^2-4\cdot b^3\right) & & \\
.\times\left(3\cdot a^2-a\cdot b-2\cdot b^2\right) & & \\
\hline
3\cdot a^2\cdot\left(-2\cdot a^3+3\cdot a^2\cdot b-a\cdot b^2-4\cdot b^3\right) & = & -6\cdot a^5+9\cdot a^4\cdot b-3\cdot a^3\cdot b^2-12\cdot a^2\cdot b^3 \\
-a\cdot b\cdot\left(-2\cdot a^3+3\cdot a^2\cdot b-a\cdot b^2-4\cdot b^3\right) & = & 2\cdot a^4\cdot b-3\cdot a^3\cdot b^2+a^2\cdot b^3+4\cdot b^4\cdot a \\
-2\cdot b^2\cdot\left(-2\cdot a^3+3\cdot a^2\cdot b-a\cdot b^2-4\cdot b^3\right) & = & 4\cdot a^3\cdot b^2-6\cdot a^2\cdot b^3+2\cdot b^4\cdot a+8\cdot b^5 \\
\hline
 & & \left(-6\cdot a^5+11\cdot a^4\cdot b-2\cdot a^3\cdot b^2-17\cdot a^2\cdot b^3+6\cdot b^4\cdot a+8\cdot b^5\right)
\end{array}$$

Ejemplo 3. *Multiplicar* $\left(x^2-2\cdot x\cdot y-y^2\right)$ *por* $\left(x^2+3\cdot x\cdot y+2\cdot y^2\right)$

Solución: Abreviado un poco el procedimiento anterior se tiene...

$$\begin{array}{r}
\left(x^2+3\cdot x\cdot y+2\cdot y^2\right) \\
.\times\left(x^2-2\cdot x\cdot y-y^2\right) \\
\hline
\left(x^4+3\cdot x^3\cdot y+2\cdot x^2\cdot y^2\right) \\
-2\cdot x^3\cdot y-6\cdot x^2\cdot y^2-4\cdot x\cdot y^3 \\
-x^2\cdot y^2-3\cdot x\cdot y^3-2\cdot y^4 \\
\hline
\left(x^4+x^3\cdot y-5\cdot x^2\cdot y^2-7\cdot x\cdot y^3-2\cdot y^4\right)
\end{array}$$

EJERCICIO 2.3

Realizar las siguientes multiplicaciones y combinar los términos semejantes

1. $(x - y)\cdot(x - 3\cdot y)$
2. $(a + 2\cdot b)\cdot(a + 3\cdot b)$
3. $(3\cdot v - 2\cdot u)\cdot(4\cdot u - 5\cdot v)$
4. $(a + 2\cdot x - 3\cdot y)\cdot(a - 2\cdot x + 3\cdot y)$
5. $3\cdot(6\cdot u - 4\cdot v - 5\cdot w) - 5\cdot(7\cdot u - 3\cdot v - 4\cdot w)$
6. $(2\cdot a - x + y)\cdot(a - 3\cdot x - y)$
7. $(3\cdot a - b + c)\cdot(a - 2\cdot b + c)$
8. $(a + 2\cdot b + 3\cdot c)\cdot(a - 2\cdot b - 3\cdot c)$
9. $\left(a - 5\cdot b^2 + 2\cdot c\right)\cdot\left(a - 5\cdot b^2 - 2\cdot c\right)$
10. $\left(a^2 + b^2 - a\cdot b\right)\cdot\left(a^2 + b^2 + a\cdot b\right)$
11. $\left(2\cdot x^2\cdot y^3 + x^4 + y^6\right)\cdot\left(2\cdot x^2\cdot y^3 - x^4 - y^6\right)$
12 $\left(a^3 + a\cdot b^2 + a^4 + b^2\right)\cdot\left(a^3 + a\cdot b^2 - a^4 - b^2\right)$
13 $\left(x^2 + x\cdot y + y^2 - 3\right)\cdot\left(x^2 - x\cdot y + y^2 + 3\right)$
14. $(a + b)\cdot(a - 2\cdot b) - a + b\cdot(a + 2\cdot b) - a\cdot(a - 3)$
15. $(2\cdot x + y)\cdot x - y + 2\cdot x - y\cdot(x - y) - 2\cdot x\cdot(x + 1)$
16. $3\cdot a - b\cdot(2\cdot a + b) - (3\cdot a - b)\cdot 2\cdot a + b + (3\cdot a - 1)\cdot(2\cdot a + b)$
17. $(3\cdot u - v)\cdot 2\cdot u - v^2 - 3\cdot u + v\cdot(2\cdot u + v) + 3\cdot u - v\cdot(2\cdot u + v)$

Respuestas : EJERCICIO 2.3

1. $x^2 - 4\cdot x\cdot y + 3\cdot y^2$
2. $a^2 + 5\cdot a\cdot b + 6\cdot b^2$
3. $22\cdot v\cdot u - 15\cdot v^2 - 8\cdot u^2$
4. $a^2 - 4\cdot x^2 + 12\cdot x\cdot y - 9\cdot y^2$
5. $-17\cdot u + 3\cdot v + 5\cdot w$
6. $2\cdot a^2 - 7\cdot a\cdot x - a\cdot y + 3\cdot x^2 - 2\cdot x\cdot y - y^2$
7. $3\cdot a^2 - 7\cdot a\cdot b + 4\cdot a\cdot c + 2\cdot b^2 - 3\cdot b\cdot c + c^2$
8. $a^2 - 4\cdot b^2 - 12\cdot b\cdot c - 9\cdot c^2$
9. $a^2 - 10\cdot a\cdot b^2 + 25\cdot b^4 - 4\cdot c^2$
10. $a^4 + a^2\cdot b^2 + b^4$
11. $2\cdot x^4\cdot y^6 - x^8 - y^{12}$
12. $a^6 + a^2\cdot b^4 - a^8 - b^4$
13. $x^4 + x^2\cdot y^2 + 6\cdot x\cdot y + y^4 - 9$
14. $2\cdot a$
15. $-y + y^2$
16. $a + 3\cdot b\cdot a - b^2$
17. $6\cdot u^2 - 2\cdot u\cdot v - v^2$

2.5 División de expresiones algebraicas .

La división o razón de dos números o expresiones algebraicas a y b , *con* b *distinto de cero*, se suele indicar por los símbolos siguientes :

$$a \div b \ , \quad a \,/\, b \quad , \quad \frac{a}{b}$$

donde el número a se llama *dividendo o numerador* , el número b se llama *divisor o denominador* y el resultado de la división se llama *cociente* .

Para la división se tienen las siguientes leyes, que también son consecuencia de la definición de una potencia *n-ésima* :

LEYES DE EXPONENTES PARA LA DIVISIÓN

IV	$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$	***" El cociente de potencias con la misma base, es la base elevada a la diferencia de los exponentes "***
V	$b^0 = 1$	***" Cualquier cantidad b distinta de cero, elevada a la potencia cero vale uno ".***
VI	$\frac{1}{b^n} = b^{-n}$	***" Los exponentes negativos en el denominador se escriben como positivos en el numerador (o viceversa) "***
VII	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	***" La potencia de un cociente es el cociente de las potencias del numerdor y el denominador "***

DEMOSTRACIONES:

LEY IV La expresión $\frac{b^m}{b^n}$ se puede rescribir con la siguiente serie de operaciones evidentes :

$$\frac{b^m}{b^n} = \frac{b^{m+0}}{b^n} = \frac{b^{m+(n-n)}}{b^n} = \left[\frac{\left(b^{m-n}\right)\cdot\left(b^n\right)}{b^n}\right] = b^{m-n}\cdot\left(\frac{b^n}{b^n}\right)$$

$$= b^{m-n}\cdot(1) = b^{m-n}$$

y queda demostrada esta ley,

LEY V Tómese $m = n$ en la ley IV anterior obteniéndose $\dfrac{b^n}{b^n} = b^{n-n} = b^0$

Pero por otra parte, también es cierto que $\dfrac{b^n}{b^n} = 1$, de modo que $b^0 = 1$

LEY VI Hacer $m = 0$ en la ley IV , para obtener : $\dfrac{b^0}{b^n} = b^{0-n} = b^{-n}$

y dado que $b^0 = 1$ por la ley V, queda probado que : $\dfrac{1}{b^n} = b^{-n}$

LEY VII De la regla para multiplicar fracciones y la definición de una potencia *n–ésima*, se sigue que . . .

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{(a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\ldots\cdot a)}{(b\cdot b\cdot b\cdot\ldots\cdot b)} = \frac{a^n}{b^n}$$

y queda demostrado.

Las leyes de los exponentes se cumplen para *todos* *los exponentes enteros* m *y* n *positivos o negativos* , por ejemplo :

a) $\dfrac{3^4}{3^{-5}} = 3^{4-(-5)} = 3^{4+5} = \boxed{3^9}$ *(por la ley IV y la regla de signos)*

b) $\left(\dfrac{4\cdot x^{-2}\cdot y^3}{5}\right)^2 = \dfrac{4^2\cdot x^{-4}\cdot y^6}{5^2} = \boxed{\dfrac{16\cdot y^4}{25\cdot x^4}}$ *(por las leyes VI , VII y III)*

Al evaluar expresiones algebraicas que tengan exponentes negativos, se pueden evitar algunos errores si primero se transforman los exponentes negativos en positivos antes de realizar cualquier cálculo .

Ejemplos . *(Simplificación de exponentes negativos)*

a) $-3\cdot b^{4}\cdot\left(5\cdot b^{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{9}\cdot b^{-7}\right) = -\left(\frac{15}{9}\right)\cdot b^{4}\cdot b^{2}\cdot b^{-7}$ *(multiplicando los coeficientes)*

$= -\left(\frac{15}{9}\right)\cdot b^{4+2-7} = -\left(\frac{15}{9}\right)\cdot b^{-1}$ *(Ley I)*

$= \boxed{-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{b}}$ *(Ley VI)*

que es una expresión mucho más simple que la expresión inicial .

b) $\left(-2\cdot a^{2}\cdot b^{-1}\right)^{3} = (-2)^{3}\cdot\left(a^{2}\right)^{3}\cdot\left(b^{-1}\right)^{3}$ *(Ley II)*

$= -8\cdot a^{6}\cdot b^{-3} = \boxed{-\frac{8\cdot a^{6}}{b^{3}}}$ *(Ley VI)*

c) $\dfrac{\left(2\cdot x^{3}\right)^{-1}\cdot\left(7\cdot x^{-4}\right)^{0}}{4\cdot x^{-2}} = \dfrac{\left(2\cdot x^{3}\right)^{-1}\cdot(1)}{4\cdot x^{-2}}$ *(Ley V)*

$= \frac{1}{4}\cdot\dfrac{x^{2}}{\left(2\cdot x^{3}\right)} = \dfrac{x^{2}}{8\cdot x^{3}} = \boxed{\dfrac{1}{8\cdot x}}$ *(Leyes VI y IV)*

d) $\left(\dfrac{y^{-1}}{3\cdot x^{-2}}\right)\cdot\left(\dfrac{3\cdot x^{2}}{y}\right)^{-2} = \dfrac{x^{2}}{3\cdot y}\cdot\dfrac{\left(3\cdot x^{2}\right)^{-2}}{y^{-2}}$ *(Leyes VI y VII)*

$= \dfrac{x^{2}}{3\cdot y}\cdot\dfrac{y^{2}}{\left(3\cdot x^{2}\right)^{2}} = \dfrac{x^{2}\cdot y^{2}}{3\cdot y\cdot\left(3^{2}\cdot x^{4}\right)}$ *(Leyes II y VI)*

$= \dfrac{x^{2-4}\cdot y^{2-1}}{3\cdot\left(3^{2}\right)} = \dfrac{x^{-2}\cdot y}{3^{3}} = \boxed{\dfrac{y}{27\cdot x^{2}}}$ *(Leyes IV y VI)*

En este último ejemplo, nótese cómo una fracción elevada a una potencia negativa se simplifica invirtiendo la fracción y cambiando el signo del exponente.

A continuación se resumen las leyes de los exponentes.
Es necesario *memorizar éstas leyes para aplicarlas al simplificar expresiones algebráicas*.

LEYES DE LOS EXPONENTES

Para cualquier número b distinto de cero y dos enteros n y m se cumple que :

I	$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$	**IV**	$\dfrac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$
II	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	**V**	$b^0 = 1$
III	$\left(b^n\right)^m = b^{n \cdot m}$	**VI**	$\dfrac{1}{b^n} = b^{-n}$
		VII	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Además, todas las propiedades para los números reales se aplican al cociente o a la multiplicación de dos expresiones algebraicas, entre ellas *la regla de los signos para la división* , teniéndose así los siguientes casos particulares. . .

2.5 a) *División de monomios.*

" Para dividir dos monomios , se dividen sus coeficientes y sus literales .
Si tienen literales comunes, éstas se elevan a la potencia que resulte aplicando las leyes de los exponentes "

Ejemplos . Note como se aplican las leyes de los exponentes a los siguientes ejercicios :

a) $\dfrac{x^5}{x^2} = x^{(5-2)} = \boxed{x^3}$

b) $\dfrac{4 \cdot a^3 \cdot y^2}{-5 \cdot a \cdot y^3} = \left(\dfrac{4}{-5} \cdot a^{3-1} \cdot y^{2-3}\right) = \left[-\left(\dfrac{4}{5}\right) \cdot a^2 \cdot y^{-1}\right] = \boxed{-\dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{a^2}{y}}$

c) $\dfrac{-\frac{2}{3}\cdot x^5\cdot a^2\cdot z}{-\frac{1}{4}\cdot b^3\cdot z^2\cdot a} = \dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{\left(-\frac{1}{4}\right)}\cdot\dfrac{x^5\cdot a^{2-1}\cdot z^{1-2}}{b^3} = \dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{x^5}{b^3}\cdot a\cdot z^{-1} = \boxed{\dfrac{8\cdot a\cdot x^5}{2\cdot z\cdot b^3}}$

d) $\dfrac{\left(-2\cdot a^4\cdot b^2\right)^3}{\left(-3\cdot a^3\cdot b^5\right)^2} = \dfrac{(-2)^3\cdot\left(a^4\right)^3\cdot\left(b^2\right)^3}{(-3)^2\cdot\left(a^3\right)^2\cdot\left(b^5\right)^2} = \dfrac{-8\cdot a^{12}\cdot b^6}{9\cdot a^6\cdot b^{10}} = -\dfrac{8}{9}\cdot a^{12-6}\cdot b^{6-10} = \boxed{-\dfrac{8\cdot a^6}{9\cdot b^4}}$

EJERCICIO 2.4

Hallar el valor numérico de las siguientes expresiones sin usar calculadora

1. 3^{-2} 2. 4^{-1} 3. $(5)^{-3}$

4. 2^{-4} 5. $(2)^{-6}\cdot(2)^3$ 6. $3^2\cdot(3)^{-3}$

7 $(5)^{-1}\cdot 5^3$ 8. $\left(3^{-2}\cdot 4^2\right)^{-2}$ 9. $\left(2^{-3}\cdot 3^2\right)^{-3}$

10. $\left[(5)^{-1}\cdot 4^2\right]^{-1}$ 11. $\left(3^{-2}\cdot 4^{-1}\right)^{-2}$ 12. $\left(2^{-1}\right)^{-2}\cdot\left(3^2\right)^{-2}$

13. $\left(3^{-2}\right)^{-1}\cdot\left(9^{-1}\right)^{-1}$ 14. $\left(2^{-4}\right)^{-1}\cdot\left(4^2\right)^{-1}$ 15. $\left(3^{-3}\right)^{-2}\cdot\left(2^2\right)^{-2}$

Escribir sin denominadores las expresiones de los ejercicios 16 a 27

16. $\dfrac{2\cdot x^2}{y^{-3}}$ 17. $\dfrac{x^3}{y^{-2}}$ 18 $\dfrac{a^3}{b^2}$ 19. $\dfrac{a^4}{b^5}$

20. $\dfrac{2\cdot y}{x^2\cdot y^3}$ 21. $\dfrac{3\cdot x^2}{2\cdot y\cdot z^3}$ 22. $\dfrac{2\cdot a}{3\cdot y^2\cdot w}$ 23. $\dfrac{b^2}{c^3\cdot d^2}$

24. $\dfrac{a^2\cdot b^{-1}}{a\cdot b^{-2}\cdot c^{-3}}$ 25. $\dfrac{x\cdot y^{-2}}{x^2\cdot y^{-3}\cdot w^0}$ 26. $\dfrac{2\cdot x^0\cdot y}{a^{-2}\cdot x^{-1}\cdot y^{-3}}$ 27. $\dfrac{8^2\cdot k^{-3}\cdot h^{-1}}{4^3\cdot k^{-1}\cdot h^{-2}\cdot a^0}$

Escribir las siguientes expresiones sin exponentes negativos o cero .

28. $a^{-2} \cdot y$

29. $a^{-1} \cdot y^{-2}$

30. $a^{0} \cdot c^{-2}$

31. $a^{-2} \cdot y^{-1}$

32. $\dfrac{2 \cdot a^{-3} \cdot b^{-1}}{4^{-1} \cdot a^{2} \cdot b^{-3}}$

33. $\dfrac{2^{-3} \cdot a^{-1} \cdot b^{-2}}{2^{-2} \cdot a^{-2} \cdot b}$

34. $\dfrac{3^{-3} \cdot a^{-2} \cdot b^{-3}}{9^{-1} \cdot a^{2} \cdot b^{-5}}$

35. $\dfrac{2^{-5} \cdot a^{-6} \cdot b^{-3}}{4^{-2} \cdot a^{-4} \cdot b^{-1}}$

36. $\dfrac{3^{-1} \cdot x^{-2} \cdot y^{2} \cdot z^{-1}}{2^{-2} \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot z^{-2}}$

37. $\dfrac{2^{-4} \cdot x^{0} \cdot y^{-1} \cdot z^{-3}}{4^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-2} \cdot z}$

38. $\dfrac{6^{-2} \cdot a^{-1} \cdot b^{3} \cdot c^{-5}}{2^{-3} \cdot a \cdot b^{-1} \cdot c^{-2}}$

39. $\dfrac{8^{2} \cdot k^{-3} \cdot h^{-1}}{4^{3} \cdot k^{-1} \cdot h^{-2} \cdot a^{0}}$

40. $\dfrac{6^{-2} \cdot a^{-1} \cdot b^{-2} \cdot c^{-3}}{3^{-4} \cdot a^{-3} \cdot b^{-2} \cdot c}$

41. $\left(\dfrac{a^{-2}}{b^{3}}\right)^{-2}$

42. $\left(\dfrac{c^{-1}}{d^{-2}}\right)^{3}$

43. $\left(\dfrac{x^{0}}{y^{2}}\right)^{-3}$

44. $\left(\dfrac{b^{4}}{c^{-3}}\right)^{-2}$

45. $\left(a^{-2} \cdot x\right)^{-2}$

46. $\left(c^{2} \cdot d^{-3}\right)^{2}$

47. $\left(c^{3} \cdot p^{2}\right)^{-3}$

48. $\left(b^{-1} \cdot c^{-2}\right)^{3}$

49. $\left(\dfrac{2^{-4} \cdot a^{-1} \cdot b^{2}}{4^{-1} \cdot a^{-2} \cdot b^{-1}}\right)^{2}$

50. $\left(\dfrac{3^{3} \cdot x^{2} \cdot y^{-2}}{9^{2} \cdot x^{-1} \cdot y^{3}}\right)^{-2}$

51. $\left(\dfrac{8^{-1} \cdot a^{-2} \cdot y^{-3}}{4^{-2} \cdot b^{-1} \cdot y^{1}}\right)^{3}$

52. $\left(\dfrac{a^{-1} \cdot b^{2} \cdot c^{-2}}{a^{0} \cdot b^{2} \cdot c^{-3}}\right)^{-4}$

53. $\left(\dfrac{6^{-2} \cdot a^{-3} \cdot b^{2}}{3^{-3} \cdot a^{-1} \cdot c^{0}}\right)^{-3}$

54. $\left(\dfrac{x^{-2} \cdot y^{3} \cdot z^{-1}}{x^{-3} \cdot z^{-2}}\right)^{4}$

55. $\left(\dfrac{b^{-2} \cdot c^{-1} \cdot t^{0}}{b^{-3} \cdot a^{-2} \cdot t^{-1}}\right)^{2}$

56. $\left(\dfrac{a^{-2} \cdot b \cdot c^{3}}{a^{0} \cdot b^{-1} \cdot c}\right)^{-2}$

57. $\dfrac{a}{b^{-1}} + \dfrac{b}{a^{-1}}$

58. $\dfrac{a^{-1}}{b^{-1}} + \dfrac{b}{a}$

59. $\dfrac{a^{-1}}{b} + \dfrac{b^{-1}}{a}$

60. $\dfrac{a^{-1}}{b^{-1}} + \dfrac{a}{b}$

Respuestas : EJERCICIO 2.4

1. $\frac{1}{9}$ 2. $\frac{1}{4}$ 3. $\frac{1}{125}$ 4. $\frac{1}{16}$ 5. $\frac{1}{8}$

6. $\frac{1}{3}$ 7 25 8. $\frac{81}{256}$ 9. $\frac{512}{729}$ 10. $\frac{5}{16}$

11. 1296 12. $\frac{4}{81}$ 13. 81 14. 1 15. $\frac{729}{16}$

16. $2\cdot x^2\cdot y^3$ 17. $x^3\cdot y^2$ 18 $a^3\cdot b^{-2}$ 19. $a^4\cdot b^{-5}$ 20. $2\cdot y^{-2}\cdot x^{-2}$

21. $3\cdot\left(2^{-1}\right)\cdot x^2\cdot y^{-1}\cdot z^{-3}$ 22. $(3)^{-1}\cdot 2\cdot a\cdot y^{-2}\cdot w^{-1}$ 23. $b^2\cdot c^{-3}\cdot d^{-2}$

24. $a\cdot b\cdot c^3$ 25. $x^{-1}\cdot y$ 26 $2\cdot y^4\cdot a^2\cdot x$ 27. $k^{-2}\cdot h$ 28. $\frac{y}{a^2}$

29. $\frac{1}{\left(a\cdot y^2\right)}$ 30 $\frac{1}{c^2}$ 31. $\frac{1}{\left(a^2\cdot y\right)}$ 32. $\frac{8}{a^5}\cdot b^2$ 33. $\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{b^3}$

34. $\frac{b^2}{3\cdot a^4}$ 35. $\frac{1}{2\cdot a^2\cdot b^2}$ 36. $\frac{4\cdot y^3\cdot z}{3\cdot x}$ 37. $\frac{y\cdot x^4}{z^4}$ 38. $\frac{2}{\left(9\cdot a^2\right)}\cdot\frac{b^4}{c^3}$

39. $\frac{h}{k^2}$ 40. $\frac{9}{4}\cdot\frac{a^2}{c^4}$ 41. $a^4\cdot b^6$ 42. $\frac{d^6}{c^3}$ 43. y^6

44. $\frac{1}{\left(b^8\cdot c^6\right)}$ 45. $\frac{a^4}{x^2}$ 46. $\frac{c^4}{d^6}$ 47. $\frac{1}{\left(c^9\cdot p^6\right)}$ 48. $\frac{1}{\left(b^3\cdot c^6\right)}$

49. $\frac{1}{16}\cdot a^2\cdot b^6$ 50. $\frac{9\cdot y^{10}}{x^6}$ 51. $\frac{8\cdot b^3}{a^6\cdot y^{12}}$ 52. $\frac{a^4}{c^4}$ 53. $\frac{64}{27}\cdot\frac{a^6}{b^6}$

54. $x^4\cdot y^{12}\cdot z^4$ 55. $\frac{b^2\cdot a^4\cdot t^2}{c^2}$ 56. $\frac{a^4}{b^4\cdot c^4}$ 57. $2\cdot a\cdot b$ 58. $\frac{2\cdot b}{a}$

59. $\frac{2}{a\cdot b}$ 60. $\frac{b^2+a^2}{a\cdot b}$

2.5 b) ***División de un multinomio por un monomio*** .

De acuerdo con la propiedad distributiva : $a \times (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

y la propiedad de inverso para la multiplicación : $\dfrac{b}{a} = \left(\dfrac{1}{a}\right) \times b$

al realizar la división de una expresión algebraica de varios términos entre una expresión de un solo término, se puede escribir . . .

$$\frac{(a+b+c)}{d} = \frac{1}{d} \cdot (a+b+c) = \left(\frac{1}{d}\right) \cdot a + \left(\frac{1}{d}\right) \cdot b + \left(\frac{1}{d}\right) \cdot c = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

es decir, *la división de un multinomio entre un monomio es la suma de los cocientes que resultan de dividir cada término del multinomio por el monomio.*

Ejemplo .

$$\frac{10 \cdot x \cdot z^3 - 3 \cdot x^2 + \left(-2 \cdot z^4\right)^3 - 6}{2 \cdot x^3 \cdot z} = \frac{10 \cdot x \cdot z^3}{2 \cdot x^3 \cdot z} + \frac{(-3) \cdot x^2}{2 \cdot x^3 \cdot z} + \frac{\left(-2 \cdot z^4\right)^3}{2 \cdot x^3 \cdot z} - \frac{6}{2 \cdot x^3 \cdot z}$$

$$= \frac{5 \cdot z^2}{x^2} - \frac{3}{2 \cdot x \cdot z} - \frac{4 \cdot z^{11}}{x^3} - \frac{3}{x^3 \cdot z}$$

2.5 c) ***División de dos multinomios*** .

La división de dos expresiones algebraicas que tienen varios términos se realiza con un procedimiento muy similar al usado para dividir dos números reales, y consiste en los siguientes pasos :

1° ***Escribir los dos multinomios que se dividen en orden descendente de las potencias de una literal común a ambos.***

2° ***Dividir el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, obteniéndose así el primer término del cociente .***

3° ***Multiplicar el cociente obtenido en el paso anterior por el divisor y restar el producto resultante al dividendo .***

4° ***La diferencia o residuo parcial obtenido en el paso anterior se trata como un nuevo dividendo y se repiten con él los pasos 2° y 3° .***

5° *Se continúa éste procedimiento hasta obtener un residuo parcial en el cual el exponente de la literal que se eligió, sea menor que su exponente en el primer término del divisor.*

Ejemplo 4 *Dividir el multinomio* $\left(-6 \cdot x^4 + 13 \cdot x^3 - 20 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 4\right)$ *entre* $2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 4$

Solución :

1° Nótese que ambos multinomios ya están ordenados respecto a su literal común x en potencias decrecientes.

Aplicando entonces el procedimiento de división enunciado antes resulta el siguiente esquema:

(Cociente)

$$-3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1$$

(divisor) $\quad 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 4 \cdot \left|\left(-6 \cdot x^4 + 13 \cdot x^3 - 20 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 4\right)\right|$ *(dividendo)*

$$-\left(-6 \cdot x^4 + 9 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2\right)$$

$$\left(4 \cdot x^3 - 8 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 4\right)$$

$$-\left(4 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 8 \cdot x\right)$$

$$\left(-2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 4\right)$$

$$-\left(-2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 4\right)$$

$$\text{............0.............}$$

(Residuo)

2° Al dividir el primer término del dividendo $\left(-6 \cdot x^4\right)$ entre el primer término del divisor $\left(2 \cdot x^2\right)$ se obtiene el primer término del cociente : $\left(-3 \cdot x^2\right)$

3° Al multiplicar el cociente obtenido en el paso anterior por el divisor : $-3 \cdot x^2 \cdot \left(2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 4\right)$ resulta : $-6 \cdot x^4 + 9 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2$ y restando este producto al dividendo queda el residuo parcial: $4 \cdot x^3 - 8 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 4$, el cual se toma ahora como nuevo dividendo y se repiten estos pasos.

En éste ejemplo la división es *exacta* porque el residuo es cero, esto significa que el multinomio divisor es un factor del multinomio dividendo.

En otras palabras, *el dividendo es el producto del cociente por el divisor* . . .

$$\left(2\cdot x^2 - 3\cdot x + 4\right)\cdot\left(-3\cdot x^2 + 2\cdot x - 1\right) = -6\cdot x^4 + 13\cdot x^3 - 20\cdot x^2 + 11\cdot x - 4$$

lo cual puede ser comprobado fácilmente por el lector .

Ejemplo 5 *Dividir* $2\cdot x^3 + x^2 - 4\cdot x^2\cdot y - 2\cdot x\cdot y + 10\cdot x\cdot y^2 + 5\cdot y^2$ *entre* $x^2 - 2\cdot x\cdot y + 5\cdot y^2$

Solución :

1° Notemos que tanto el dividendo como el divisor están ordenados en potencia decrecientes de una de sus literales comunes x, así que aplicando el procedimiento de división resulta el siguiente esquema :

$$\begin{array}{r|l}
 & 2\cdot x + 1 \\
\hline
x^2 - 2\cdot x\cdot y + 5\cdot y^2\cdot & 2\cdot x^3 + x^2 - 4\cdot x^2\cdot y - 2\cdot x\cdot y + 10\cdot x\cdot y^2 + 5\cdot y^2 \\
 & -\left(2\cdot x^3 \ldots\ldots - 4\cdot x^2\cdot y\cdot \ldots\ldots\ldots\ldots + 10\cdot x\cdot y^2\right) \\
\cline{2-2}
 & \left(\ldots\ldots x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots - 2\cdot x\cdot y\cdot \ldots\ldots\ldots\ldots + 5\cdot y^2\right) \\
 & -\left(\ldots\ldots x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots - 2\cdot x\cdot y\cdot \ldots\ldots\ldots\ldots + 5\cdot y^2\right) \\
\cline{2-2}
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

2° Al dividir el primer término del dividendo $\left(2\cdot x^3\right)$ entre el primer término del divisor $\left(x^2\right)$, se obtiene el primer término del cociente $(2\cdot x)$.

3° Al multiplicar el cociente obtenido en el paso anterior por el divisor resulta :
$2\cdot x\cdot\left(x^2 - 2\cdot x\cdot y + 5\cdot y^2\right) = 2\cdot x^3 - 4\cdot x^2\cdot y + 10\cdot x\cdot y^2$.
Restando este producto al dividendo queda el residuo parcial: $x^2 - 2\cdot x\cdot y + 5\cdot y^2$, el cual se toma ahora como el nuevo dividendo y se repiten los pasos 2° y 3° anteriores.

En éste ejemplo también la división es exacta (*el residuo es cero*) . El multinomio divisor es un factor del multinomio dividendo y por lo tanto el dividendo es el producto del cociente por el divisor .

$$\left(x^2 - 2\cdot x\cdot y + 5\cdot y^2\right)\cdot(2\cdot x + 1) = 2\cdot x^3 + x^2 - 4\cdot x^2\cdot y - 2\cdot x\cdot y + 10\cdot y^2\cdot x + 5\cdot y^2$$

que el lector puede comprobar fácilmente.

Ejemplo 6 *Dividir* $6 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b - 2 \cdot a \cdot b^2 + 10 \cdot b^3$ *entre* $-2 \cdot a^2 - 3 \cdot a \cdot b + 4 \cdot b^2$

Solución :

1° Notemos que tanto el dividendo como el divisor están ordenados en potencia decrecientes de una de sus literales comunes (a), así que aplicando el procedimiento de división resulta :

$$
\begin{array}{r|l}
 & -3 \cdot a + 3 \cdot b \\
\hline
-2 \cdot a^2 - 3 \cdot a \cdot b + 4 \cdot b^2 \cdot & \left(6 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b - 2 \cdot a \cdot b^2 + 10 \cdot b^3\right) \\
 & -\left(6 \cdot a^3 + 9 \cdot a^2 \cdot b - 12 \cdot a \cdot b^2\right) \\
\cline{2-2}
 & \left(-6 \cdot a^2 \cdot b + 10 \cdot a \cdot b^2 + 10 \cdot b^3\right) \\
 & -\left(-6 \cdot a^2 \cdot b - 9 \cdot a \cdot b^2 + 12 \cdot b^3\right) \\
\cline{2-2}
 & \left(19 \cdot a \cdot b^2 - 2 \cdot b^3\right)
\end{array}
$$

2° Al dividir el primer término del dividendo entre el primer término del divisor se obtiene el primer término del cociente : $\dfrac{6 \cdot a^3}{-2 \cdot a^2} = -3 \cdot a$.

3° Al multiplicar este cociente por el divisor resulta :

$$-3 \cdot a \cdot \left(6 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b - 2 \cdot a \cdot b^2 + 10 \cdot b^3\right) = 6 \cdot a^3 + 9 \cdot a^2 \cdot b - 12 \cdot a \cdot b^2$$

Restando este producto al dividendo queda el residuo parcial: $-6 \cdot a^2 \cdot b + 10 \cdot a \cdot b^2 + 10 \cdot b^3$, el cual se toma ahora como nuevo dividendo etc. etc.

En éste ejemplo la división *no es exacta* (el residuo no es cero) . Esto significa que el dividendo es igual al cociente más el residuo dividido por el divisor

$$\left(6 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b - 2 \cdot a \cdot b^2 + 10 \cdot b^3\right) = (-3 \cdot a + 3 \cdot b) + \frac{19 \cdot a \cdot b^2 - 2 \cdot b^3}{-2 \cdot a^2 - 3 \cdot a \cdot b + 4 \cdot b^2}$$

EJERCICIO 2.5

Hacer la división de las expresiones algebraicas indicadas .

1. $\dfrac{6\cdot a^2 + a\cdot b - b^2}{2\cdot a + b}$

2. $\dfrac{3\cdot a^2 - 5\cdot a\cdot b - 2\cdot b^2}{a - 2\cdot b}$

3. $\dfrac{6\cdot x^2 + x\cdot y - y^2}{2\cdot x + y}$

4. $\dfrac{-12\cdot x^2 + 23\cdot x\cdot y - 10\cdot y^2}{4\cdot x - 5\cdot y}$

5. $\dfrac{a^3 - b^3}{a - b}$

6. $\dfrac{6\cdot x^3 + 5\cdot x^2\cdot y - 16\cdot x\cdot y^2 - 15\cdot y^3}{2\cdot x + 3\cdot y}$

7. $\dfrac{6\cdot x^5 + x^4\cdot y - 3\cdot x^3\cdot y^2 + 26\cdot x^2\cdot y^3 - 2\cdot y^5}{-2\cdot x^2 - 3\cdot x\cdot y + y^2}$

8. $\dfrac{-10\cdot a^3 - 21\cdot a^2\cdot b - 17\cdot a\cdot b^2 - 12\cdot b^3}{2\cdot a + 3\cdot b}$

9. $\dfrac{4\cdot a^2 - 9\cdot b^2 + 6\cdot b\cdot c - c^2}{2\cdot a - 3\cdot b + c}$

10. $\dfrac{25\cdot x^2 - a^2 + 6\cdot a\cdot t - 9\cdot t^2}{5\cdot x + a - 3\cdot t}$

11. $\dfrac{10\cdot x^2 - y\cdot x + 4\cdot b\cdot x + 7\cdot b\cdot y - 6\cdot b^2 - 2\cdot y^2}{2\cdot x - y + 2\cdot b}$

12. $\dfrac{-6\cdot x^4 + 17\cdot x^3\cdot u - 28\cdot x^2\cdot u^2 + 23\cdot x\cdot u^3 - 10\cdot u^4}{2\cdot x^2 - 3\cdot x\cdot u + 2\cdot u^2}$

Hacer las operaciones indicadas y combinar los términos semejantes.

13. $x\cdot y\cdot\left(-x^2\cdot y + x\cdot y^2\right) + \dfrac{x^5\cdot y^4 - x^4\cdot y^5}{x^2\cdot y^2}$

14 $x^3\cdot y^2\cdot\left(x\cdot y^2 - 2\cdot x^2\cdot y\right) - \dfrac{x^5\cdot y^6 - 3\cdot x^6\cdot y^5}{x\cdot y^2}$

15. $\dfrac{2\cdot\left(3\cdot a^3\cdot b - 5\cdot a^2\cdot b^2\right)}{a^{-1}\cdot b^{-2}} - \left(6\cdot a^6\cdot b^6 - 11\cdot a^5\cdot b^7\right)\cdot a^{-2}\cdot b^{-3}$

16. $\dfrac{2\cdot a^2\cdot b\cdot c^3 - 5\cdot a\cdot b^3\cdot c^2}{3^{-1}\cdot\left(a^{-1}\cdot b^{-2}\cdot c^{-1}\right)} - \left(7\cdot a^5\cdot b^4\cdot c^7 - 17\cdot a^4\cdot b^6\cdot c^6\right)\cdot\dfrac{a^{-2}}{b}\cdot c^{-3}$

Respuestas : EJERCICIO 2.5

1. $3\cdot a - b$
2. $3\cdot a + b$
3. $3\cdot x - y$
4. $-3\cdot x + 2\cdot y$
5. $a^2 + b\cdot a + b^2$
6. $3\cdot x^2 - 2\cdot y\cdot x - 5\cdot y^2$
7. $-3\cdot x^3 + 4\cdot y\cdot x^2 - 6\cdot y^2\cdot x - 2\cdot y^3$
8. $-5\cdot a^2 - 3\cdot b\cdot a - 4\cdot b^2$
9. $2\cdot a + 3\cdot b - c$
10. $-a + 3\cdot t + 5\cdot x$
11. $-3\cdot b + 5\cdot x + 2\cdot y$
12. $-3\cdot x^2 + 4\cdot x\cdot u - 5\cdot u^2$
13. 0
14. $x^5\cdot y^3$
15. $a^3\cdot b^4$
16. $-a^3\cdot b^3\cdot c^4 + 2\cdot a^2\cdot b^5\cdot c^3$

EJERCICIO 2.6

Combinar los términos semejantes en los siguientes ejercicios .

1. $2\cdot a\cdot(5\cdot a\cdot b) + b\cdot(4\cdot a\cdot b) - 5\cdot a^2\cdot(3\cdot b) - 2\cdot a\cdot b\cdot(-3\cdot b)$
2. $-4\cdot x^2\cdot\left(x\cdot y^2\right) + 2\cdot x\cdot y\cdot\left(3\cdot x^2\cdot y\right) - y\cdot\left(-3\cdot x^3\cdot y\right) + 4\cdot x\cdot y^2\cdot\left(-2\cdot x^2\right)$
3. $3\cdot a\cdot b^2\cdot(a\cdot b) + 5\cdot a^2\cdot b\cdot\left(b^2\right) - 4\cdot a\cdot b\cdot\left(a\cdot b^2\right) - 2\cdot a\cdot b^2\cdot(3\cdot a\cdot b)$
4. $5\cdot x\cdot y^2\cdot\left(-3\cdot x^2\cdot z^3\right) - 6\cdot x\cdot z^2\cdot y\cdot\left(-2\cdot x^2\cdot y\cdot z\right) + \left(-3\cdot z\cdot x^2\right)\cdot\left(-x\cdot y^2\cdot z^2\right)$
5. $\dfrac{5\cdot a^4\cdot b^3}{a^2\cdot b} - \dfrac{12\cdot a^5\cdot b^4}{6\cdot a^3\cdot b^2} + \dfrac{15\cdot a^3\cdot b^5}{5\cdot a\cdot b^3}$
6. $\dfrac{36\cdot u^2\cdot v^3}{9\cdot u^7\cdot v^5} - \dfrac{16\cdot u^6\cdot v^2}{4\cdot u^{11}\cdot v^4} - \dfrac{u^4\cdot v^5}{3\cdot u^9\cdot v^7}$
7. $\dfrac{32\cdot x^7\cdot y^4}{8\cdot x^4\cdot y^3} + \dfrac{24\cdot x^9\cdot y^2}{6\cdot x^6\cdot y} - \dfrac{6\cdot x^5\cdot y^3}{2\cdot x^2\cdot y^2}$
8. $\dfrac{18\cdot g^5\cdot h^3}{12\cdot g^3\cdot h^5} - \dfrac{5\cdot g^3\cdot h^6}{15\cdot g\cdot h^8} - \dfrac{6\cdot g^2\cdot h^{-3}}{18\cdot g^0\cdot h^{-1}}$

Respuestas : EJERCICIO 2.6

1. $-5\cdot a^2\cdot b+10\cdot b^2\cdot a$
2. $-3\cdot x^3\cdot y^2$
3. $-2\cdot a^2\cdot b^3$
4. 0
5. $6\cdot a^2\cdot b^2$
6. $\dfrac{-1}{\left(3\cdot u^5\cdot v^2\right)}$
7. $5\cdot x^3\cdot y$
8. $\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{g^2}{h^2}$

2.6 Notación Científica.

Los exponentes proporcionan una eficiente manera para escribir números muy grandes o muy pequeños y hacer cálculos con ellos. Éstos cálculos aparecen frecuentemente en las ciencias.

Como ejemplo, una sola gota de agua contiene mas de 33 millones de billones de moléculas $H_2\cdot O$, es decir el número 33 seguido de 18 ceros :

$$33,000,000,000,000,000,000$$

Es conveniente escribir números como éste en notación científica, la cual tiene la *forma general* :

$$C\times 10^n$$

donde C es un número positivo o negativo cuyo valor absoluto está entre 1 y 10 $(1\le |C|<10)$ y *el exponente n es un número entero*.

La cantidad del ejemplo anterior queda entonces expresada como 3.3×10^{19}

Un exponente n *positivo* indica que el numero representado es muy grande y que para escribir tal número sin usar la notación científica, *el punto decimal debe ser movido n lugares hacia la derecha*.

Por el contrario, un exponente n *negativo* indica que el número en cuestión es muy pequeño (su valor queda en el intervalo $-1<C<1$) y para escribir tal número sin usar la notación científica, *el punto decimal debe moverse n lugares hacia la izquierda* .

Por ejemplo, la masa en gramos de un electrón es aproximadamente 9.1×10^{-28}, número que escrito sin usar la notación científica es. . .

$$0.000,000,000,000,000,000,000,000,000,91$$

y como se observa, el punto decimal que estaba inicialmente entre el 9 y el 1 , se recorrió 28 lugares hacia la izquierda .

Ejemplo 7 *Convertir los siguientes números a la forma indicada .*

a) 1.345×10^{2} *a la forma decimal* *b)* $9.36 \cdot 10^{-6}$ *a la forma decimal*

c) $-0.000,078,2$ *a la notación científica* *d)* $836,100,000$ *a la notación científica*

Solución :

a) En éste número el exponente (2) es positivo, así que el punto decimal debe transladarse 2 lugares hacia la derecha para obtener. . .

$$1.345 \times 10^{2} = 134.5$$

b) El exponente (-6) es negativo, lo cual indica que el número expresado en ésta notación es muy pequeño, y que el punto decimal debe transladarse 6 lugares hacia la izquierda para obtener:

$$9.36 \cdot 10^{-6} = 0.000,009,36$$

c) El número $-0.000,078,2$ es muy pequeño, así que al escribirlo en notación científica el exponente será negativo y el punto decimal *debe ser transladado hacia la derecha* el número de lugares necesarios hasta tener una sola cifra distinta de cero a la izquierda, como sigue :

$$-0.000,078,2 = -7.82 \times 10^{-5}$$

d) El número $836,100,000$ es muy grande, así que al escribirlo en notación científica el exponente será positivo y el punto decimal *debe ser transladado hacia la izquierda* el número de lugares necesarios hasta tener una sola cifra distinta de cero a la izquierda, como sigue:

$$836,100,000 = 8.36 \times 10^{8}$$

EJERCICIO 2.7

Completar la tabla

$$\begin{bmatrix} . & forma\_exponencial & Base & exponente & forma\_factorizada \\ 1 & 4^3 & \_\_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ 2 & (x-1)^2 & \_\_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ 3 & \_\_\_\_\_ & 5 & 4 & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ 4 & \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_ & (-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5) \\ 5 & \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_ & \left(x^2+4\right)\cdot\left(x^2+4\right)\cdot\left(x^2+4\right) \end{bmatrix}$$

Transformar las siguientes expresiones a la notación científica :

6. $93,000,000$ 7. $900,000,000$ 8. $0.000,004,35$

9. $0.000,087$ 10. 6.87 11. $0.004,392$

Cambiar a la forma decimal :

12. 1.91×10^6 13. 2.345×10^{11} 14. 6.21×10^0

15. 8.52×10^{-3} 16. 7.021×10^{-5} 17. 3.798×10^{-8}

18. La velocidad de la luz en el vacío es $18,000,000$ kilómetros por minuto. La distancia del Sol a la Tierra es $149,637,000$ kilómetros. ¿Cuánto tiempo tarda la luz solar en llegar a la superficie terrestre ?

Usando la calculadora, hacer las operaciones indicadas:

19. $750\cdot\left(1+\dfrac{0.11}{365}\right)^{800}$ 20. $\dfrac{\left(\sqrt{2}\cdot 10^4\right)^6}{\left(1.68\cdot 10^5\right)^5}$ 21. $\dfrac{4-(1.25)^6}{1-0.625^4}$

22. $\dfrac{67000000+93000000}{0.0052}$ 23. $\dfrac{\left[(3.28)\cdot 10^{-6}\right]^{10}}{\left[(5.34)\cdot 10^{-3}\right]^{25}}$ 24. $\dfrac{0.0000928-0.0000021}{8980000000.0}$

25. El capital A invertido después de n años al r por ciento de interés compuesto anual es :

$$A = P\cdot(1+r)^n$$

donde P es el capital inicial (al tiempo $t = 0$). Calcular A si $P = \$\ 5000$ y $r = 1.2\%$ para $t = 5$, 10 , 20 , 30 , y 50 años .

Respuestas EJERCICIO 2.7

$$\begin{bmatrix} . & forma\_exponencial & Base & exponente & forma\_factorizada \\ 1 & 4^3 & 4 & 3 & (4)\cdot(4)\cdot(4) \\ 2 & (x-1)^2 & x-1 & 2 & (x-1)\cdot(x-1) \\ 3 & 5^4 & 5 & 4 & (5)\cdot(5)\cdot(5)\cdot(5) \\ 4 & (-5)^5 & -5 & 5 & (-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5) \\ 5 & \left(x^2+4\right)^3 & x^2+4 & 3 & \left(x^2+4\right)\cdot\left(x^2+4\right)\cdot\left(x^2+4\right) \end{bmatrix}$$

6. 9.3×10^{7}

7. 9.0×10^{8}

8. 4.35×10^{-6}

9. 8.7×10^{-5}

10. 6.87×10^{0}

11. 4.392×10^{-3}

12. $1,910,000$

13. $234,500,000,000$

14. 6.21

15. $0.008,52$

16. $0.000,070,21$

17. $0.000,000,037,98$

18. $\left(\dfrac{1.49637\times 10^{8}\cdot km}{1.8\times 10^{7}\cdot\dfrac{km}{min}}\right) = 8.13\cdot min$

19. $750\cdot\left(1+\dfrac{0.11}{365}\right)^{800} = 954.448$

20. $\dfrac{\left(\sqrt{2}\times 10^{4}\right)^{6}}{\left(1.68\times 10^{5}\right)^{5}} = 0.0597$

21. $\dfrac{4-(1.25)^{6}}{1-(0.625)^{4}} = 0.2186$

22. $\dfrac{67000000+93000000}{0.0052} = 3.076\times 10^{10}$

23. $\dfrac{\left(3.28\times 10^{-6}\right)^{10}}{\left(5.34\times 10^{-3}\right)^{25}} = 93.369$

24. $\dfrac{0.0000928-0.0000021}{8980000000.0} = 1.01\times 10^{-14}$

25. $A(5) = 5307.29$, $A(10) = 5633.46$, $A(20) = 6347.17$, $A(30) = 7151.31$, $A(50) = 9078.11$.