CAPÍTULO VI : ECUACIONES LINEALES

6.1 Definición de ecuación.

Una ecuación es una igualdad condicional de dos expresiones algebráicas .
Algunos ejemplos son:

a) $(3\cdot x - 7) = (2\cdot x + 3)$ b) $3\cdot x^2 + 2\cdot x - 1 = 0$ c) $\left(\frac{2\cdot x}{3\cdot x^2 - 1}\right) = \frac{x}{2 - x^2}$

Una ecuación contiene algunos números de valor conocido (llamados ***constantes***) y otros de valor desconocido (llamados ***incógnitas***) . La expresión que está a la izquierda del signo de igualdad se llama ***primer miembro o miembro izquierdo***, la expresión que está a la derecha del signo de igualdad se llama ***segundo miembro o miembro derecho*** de la ecuación .

Resolver una ecuación es encontrar todos los valores de la(s) incógnita(s) para los cuales la ecuación es una proposición verdadera. Estos valores se llaman soluciones o raíces de la ecuación .

Asi por ejemplo, la *única* solución de la ecuación $(3\cdot x - 7) = (2\cdot x + 3)$ es $x = 10$, porque al substituir la incógnita x por el número 10 se obtiene una proposición verdadera o igualdad entre los dos miembros de la ecuación:

$$[3\cdot(10) - 7] = [2\cdot(10) + 3]$$
$$20 = 20$$

Similarmente, las *dos* soluciones de la ecuación $\left(3\cdot x^2 + 2\cdot x - 1\right) = 0$ son , $x = -1$; $x = \frac{1}{3}$, porque al substituir ambos valores, hacen verdadera a la ecuación.

Asimismo, la ecuación $\left(\frac{2\cdot x}{3\cdot x^2 - 1}\right) = \frac{x}{2 - x^2}$ tiene tres soluciones distintas: $x = -1$; $x = 0$ y $x = 1$

Estos tres ejemplos ilustran que una ecuación algebráica se cumple sólo para ciertos valores *de su(s) incógnita(s)*, es por esto que las llamaremos ***ecuaciones condicionales*** , por contraposición a las ecuaciones que son ciertas *para casi* cualquier número real* que se llaman ***identidades***. Una identidad es por ejemplo. . .

$$\left(x^2 - 9\right) = (x + 3)\cdot(x - 3)$$

porque *cualquier* valor numérico real que se asigne a su incógnita x es una solución de la ecuación.

* En una ecuación cualquiera , los valores ***permitidos*** de las incógnitas , hacen que la ecuación tenga un significado bien definido . Por ejemplo en la identidad . . .

$$\frac{x^3 + 1}{x - 1} = x^2 + x + 1 + \frac{2}{(x - 1)}$$

el número $x = 1$ no es un valor permitido para la incógnita x , puesto que implica un división por cero, la cual no está definida

El proceso algebráico para determinar la solución de una ecuación usualmente genera una cadena de ecuaciones intermedias y ***equivalentes***, cada una con las mismas soluciones que la ecuación original . Tales ecuaciones se obtienen de la ecuación inicial por medio de las leyes de substitución y cancelación de la igualdad.
Por ejemplo, es fácil comprobar que $x = 4$ y $x = -2$ son soluciones de las siguientes ecuaciones. . .

(I) $\left(4\cdot x^2 + 2\cdot x - 4\right) = \left(x^2 + 8\cdot x + 20\right)$

(II) $\left(3\cdot x^2 + 2\cdot x - 4\right) = (8\cdot x + 20)$

(III) $3\cdot x^2 - 6\cdot x - 4 = 20$

(IV) $3\cdot x^2 - 6\cdot x - 24 = 0$

donde las ecuaciones (II) , (III) y (IV) son equivalentes a la (I) porque se obtuvieron de la ecuación inicial (I) mediante las propiedades básicas de la igualdad. (ver Capitulo I).

ECUACIONES EQUIVALENTES .

Una ecuación se transforma en otra ecuación equivalente por los siguientes procedimientos :

- *Sumando o restando la misma cantidad de ambos miembros de la ecuación*
- *Multiplicando o dividiendo ambos miembros de la ecuación* por la misma cantidad (distinta de cero)*

- *NOTA* : *Al multiplicar o dividir una ecuación por una variable o por una expresión algebráica completa, verificar siempre que la ecuación equivalente que resulta, tenga las mismas soluciones que la original*

Asi por ejemplo , si a , b , c y d son constantes en la ecuación. . .

(I) $a\cdot x - b = c\cdot x + d$

sumando a ambos miembros de la ecuación la cantidad $(b - c\cdot x)$ se obtiene la ecuación equivalente . . .

$$(a\cdot x - b) + (b - c\cdot x) = (c\cdot x + d) + (b - c\cdot x)$$

(II) $(a\cdot x - c\cdot x) = (b + d)$

Las acuaciones (I) y (II) son equivalentes de acuerdo con el procedimiento descrito antes, y por lo tanto tienen las mismas soluciones.
Notemos que la ecuación (II) se pudo obtener directamente de la ecuación (I) con solo ***transladar*** los términos $c\cdot x$ y $-b$ de un miembro a otro de la ecuación, cambiando al mismo tiempo sus signos algebráicos. Llamaremos a ésta procedimiento ***transposición*** .

Ejemplo 1. Resolver la ecuación : $6\cdot(x - 1) + 3 = 3\cdot(7\cdot x + 3)$

Solución: Eliminando los paréntesis se obtiene : $6\cdot x - 6 + 3 = 21\cdot x + 9$ (I)

$6\cdot x - 3 = 21\cdot x + 9$ (II)

Transponiendo los términos $21\cdot x$ y -3 : $6\cdot x - 21\cdot x = 9 + 3$ (III)

$-15\cdot x = 12$ (IV)

Dividiendo ambos miembros por -15 : $$\frac{-15\cdot x}{-15} = \frac{12}{-15} \qquad (\text{V})$$

y finalmente . . . $$\boxed{x = -\left(\frac{4}{5}\right)} \qquad (\text{V I})$$

Estas seis ecuaciones son *equivalentes* entre si y se dice que constituyen los pasos del proceso para obtener la solución de la ecuiación inicial

Ejemplo 2. Resolver la ecuación : $\left(\dfrac{x}{x-3}\right) - 2 = \dfrac{4}{x-3}$

Solución: Multiplicando los dos miembros por $(x-3)$: $$\left(\frac{x}{x-3} - 2\right)\cdot(x-3) = \frac{4}{(x-3)}\cdot(x-3)$$

$$\frac{x\cdot(x-3)}{(x-3)} - 2\cdot(x-3) = 4$$

Quitando paréntesis $\quad x - 2\cdot x + 6 = 4$

Transponiendo el término 6 : $\quad -x = 4 - 6$

Dividiendo por -1: $\quad \dfrac{-x}{(-1)} = \dfrac{-2}{(-1)}$

Solución : $\quad \boxed{x = 2}$

Finalmente, puesto que multiplicamos por la cantidad variable $(x-3)$, debemos verificar que $x = 2$ es realmente la solución de la ecuación original, substituyendo en ella ese valor numérico para la incógnita.

$$\frac{x}{x-3} - 2 = \frac{4}{x-3} \longrightarrow \frac{(2)}{(2)-3} - 2 = \frac{4}{(2)-3} \longrightarrow -4 = -4$$

y en efecto se obtiene una igualdad entre ambos miembros de la ecuación.

Como en todas las habilidades que podemos adquirir, las habilidades matemáticas requieren de *¡ mucha práctica !* . Para que el álgebra trabaje para Usted, Usted debe primero invertir bastante tiempo con ella y aprender de sus éxitos y también de sus fracasos .

6.2 Ecuaciones lineales .

Son ecuaciones lineales, todas aquellas que pueden ser transformadas a la forma general equivalente :

$$a\cdot x + b = 0$$

donde las literales a y b representan constantes y además $a \neq 0$.

Las ecuaciones lineales tienen *exactamente una* solución, como se puede comprobar en la solución general siguiente:

	$a \cdot x + b = 0$	(I)
Transponiendo el término b:	$a \cdot x = -b$	(II)
Dividiendo ambos lados entre a	$\dfrac{a \cdot x}{a} = \dfrac{-b}{a}$	(III)
	$x = -\left(\dfrac{b}{a}\right)$	(IV)

Notemos que la ecuación (IV) se pudo obtener directamente de la ecuación (II) con solo ***transladar*** el factor A de un miembro a otro de la ecuación, cambiando al mismo tiempo la operación que realiza, es decir si multiplica en un miembro entonces divide en el otro y viceversa. Llamaremos también a ésta procedimiento ***transposición.***

Veamos un familiar problema de conversión: La temperatura C en grados Celsius se convierte en grados Fahrenheit F mediante la ecuación lineal:

$$F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$$

La estructura de esta ecuación sigue la prioridad normal de operaciones: (multiplicaciones y divisiones antes que sumas y restas) . Primero C se multiplica por $\frac{9}{5}$, luego se suma 32 al resultado. Para resolver esta ecuación para C en términos de F , necesitamos deshacer lo que se ha hizo para C , es decir *<u>hacemos las operaciones inversas en el orden inverso</u>*.

	$F = \dfrac{9}{5} \cdot C + 32$
1º . Sustraer 32 para deshacer la suma de 32	$F - 32 = \dfrac{9}{5} \cdot C$
2º . Dividir por $\frac{9}{5}$ para deshacer la multiplicación por $\frac{9}{5}$:	$\dfrac{F - 32}{\left(\frac{9}{5}\right)} = \dfrac{\frac{9}{5} \cdot C}{\left(\frac{9}{5}\right)}$
3º . Simplificando resulta :	$\boxed{\dfrac{5}{9} \cdot (F - 32) = C}$

que es la ecuación que ralaciona una temperatura en grados Fahrenheit con la misma en grados Celsius.

GUÍA PARA RESOLVER ECUACIONES LINEALES.

- ***Quitar*** todos los símbolos de agrupación.
- Si las ecuaciones contienen fracciones, ***multiplicar*** primero ambos miembros de la ecuación por el *mcm* de los denominadores.
- Agrupar y ***combinar*** términos semejantes .
- ***Identificar*** las operaciones y su orden de prioridad (multiplicaciones y divisiones antes que sumas y restas)
- ***Resolver*** para la incógnita, *haciendo las operaciones inversas en el orden inverso*.
- ***Verificar*** la respuesta (Este es un deber si se multiplicó o se dividió por una cantidad variable)

Ejemplo 3. Resolver la ecuación : $\left[5\cdot(2\cdot x-3\cdot a)-\frac{2}{3}\right] = \left[\frac{3}{2}\cdot(3\cdot x+1)-3\cdot a\right]$

Solución:

1° Eliminando los paréntesis : $10\cdot x-15\cdot a-\frac{2}{3} = \frac{9}{2}\cdot x+\frac{3}{2}-3\cdot a$

2° Multiplicando por el *mcm* : $6\cdot\left(10\cdot x-15\cdot a-\frac{2}{3}\right) = 6\cdot\left(\frac{9}{2}\cdot x+\frac{3}{2}-3\cdot a\right)$

3° Simplificando: $(60\cdot x-90\cdot a-4) = 27\cdot x+9-18\cdot a$

4° Transponiendo términos: $(60\cdot x-27\cdot x) = (9-18\cdot a+90\cdot a+4)$

$$33\cdot x = 13+72\cdot a$$

$$x = \frac{13+72\cdot a}{33}$$

Ejemplo 4. Resolver la ecuación : $\left(\frac{2}{y-1}-\frac{2}{3}\right) = \left[\frac{3}{5\cdot(y-1)}-\frac{9}{10}\right]$

Solución:

1° Multiplicando por el *mcm* : $30\cdot(y-1)\cdot\left(\frac{2}{y-1}-\frac{2}{3}\right) = 30\cdot(y-1)\cdot\left[\frac{3}{5\cdot(y-1)}-\frac{9}{10}\right]$

2° Simplificando: $80-20\cdot y = 18-27\cdot(y-1)$

4° Transponiendo términos: $(27\cdot y-20\cdot y) = (27+18-80)$

$$7\cdot y = -35$$

Solución : $y = -\left(\frac{35}{7}\right) = -5$

5° Verificación: $\left(\frac{2}{y-1}-\frac{2}{3}\right) = \left[\frac{3}{5\cdot(y-1)}-\frac{9}{10}\right]$

$$\left[\frac{2}{(-5)-1}-\frac{2}{3}\right] = \left[\frac{3}{5\cdot[(-5)-1]}-\frac{9}{10}\right]$$

$$\left(\frac{2}{-6}-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3}{-30}-\frac{9}{10}\right)$$

la solución cumple la ecuación: $-\left(\frac{6}{6}\right) = -\left(\frac{10}{10}\right)$

El siguiente ejemplo ilustra la importancia de la verificar la solución cuando se ha multiplicado o dividido una ecuación por una expresión que involucra a su(s) variable(s).

<u>*Ejemplo*</u> 5. Resolver para x : $\frac{5\cdot x+2}{x-3}+2 = \frac{4\cdot x+5}{x-3}$

<u>*Solución*</u>:

1° Multiplicando por el *mcm* : $(x-3)\cdot\left(\frac{5\cdot x+2}{x-3}+2\right) = (x-3)\cdot\left(\frac{4\cdot x+5}{x-3}\right)$

2° Simplificando: $5\cdot x+2+2\cdot(x-3) = 4\cdot x+5$

3° Transponiendo términos: $5\cdot x+2\cdot x-(4\cdot x) = 5-2+6$

se obtiene la ecuación . . .

$$7\cdot x-4 = 4\cdot x+5$$

$$3\cdot x = 9$$

$$x = \frac{9}{3}$$

¿ Solución ? $x = 3$

Sin embargo el valor $x = 3$ no es una solución de la ecuación inicial, porque los denominadores de la ecuación se anulan cuando la variable x toma el valor 3 , lo cual implicaría una división por cero .

Esto significa que la ecuación dada *no tiene soluciones*.

6.3 Soluciones extrañas .

Como se muestra en el ejemplo anterior, si una ecuación se multiplica por una expresión variable (es decir, que contenga a la(s) incógnita(s), la ecuación resultante podría tener raíces que no satisfacen a la ecuación inicial . Éstas "soluciones" se llaman *extrañas* .
Las soluciones extrañas se obtienen cuando uno de los pasos de solución genera una ecuación no equivalente a la ecuación original .
Por ésta razón , si una ecuación se ha de multiplicar por una expresión que contenga a la incógnita, con el fin de obtener sus soluciones, éstas se deben verificar *en la ecuación original* para determinar si alguna de ellas es extraña .

Ejemplo 6. Resolver para x la ecuación $\dfrac{3\cdot x-2}{2\cdot x+1} = \dfrac{6\cdot x-9}{4\cdot x+3}$

Solución:

1° Multiplicando por el *mcm* : $(2\cdot x+1)\cdot(4\cdot x+3)\cdot\left(\dfrac{3\cdot x-2}{2\cdot x+1}\right) = (2\cdot x+1)\cdot(4\cdot x+3)\cdot\left(\dfrac{6\cdot x-9}{4\cdot x+3}\right)$

2° Simplificando: $(4\cdot x+3)\cdot(3\cdot x-2) = (2\cdot x+1)\cdot(6\cdot x-9)$

$$\left(12\cdot x^2+x-6\right) = \left(12\cdot x^2-12\cdot x-9\right)$$

3° Transponiendo términos: $12\cdot x^2-12\cdot x^2+x+12\cdot x = -9+6$

se obtiene la ecuación . . .

$$13\cdot x = -3$$

$$x = -\left(\frac{3}{13}\right)$$

4° *Comprobación en la ecuación original :*

$$\frac{3\cdot\left(\frac{-3}{13}\right)-2}{2\cdot\left(\frac{-3}{13}\right)+1} = \frac{6\cdot\left(\frac{-3}{13}\right)-9}{4\cdot\left(\frac{-3}{13}\right)+3} \longrightarrow \frac{\frac{-9}{13}-2}{\frac{-6}{13}+1} = \frac{\frac{-18}{13}-9}{\frac{-12}{13}+3} \longrightarrow \frac{\left(\frac{-35}{13}\right)}{\left(\frac{7}{13}\right)} = \frac{\left(\frac{-135}{13}\right)}{\left(\frac{27}{13}\right)}$$

es decir $5 = 5$. Por lo tanto la solución $x = \dfrac{-3}{13}$ es correcta .

Hasta aquí nuestras ecuaciones se han escogido cuidadosamente para que los cálculos no resultaran embrollados. Esto es muy artificial , pues en los problemas de la vida real a menudo se involucran números que pueden no ser simples enteros o fracciones. En tales casos una calculadora electrónica es muy útil .

Ejemplo 7. Resolver con ayuda de una calculadora, la ecuación $\dfrac{1}{1.32} - \dfrac{3}{(x-1)} = \dfrac{1.734}{(0.3714)\cdot(x-1)}$

Solución: Los errores de redondeo en las cifras decimales, se minimizan si resolvemos la ecuación para la variable x antes de hacer cualquier cálculo. En este caso el *mcm* es $(1.32)\cdot(x-1)\cdot(0.3714)$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por el *mcm* de los denominadores, resulta:

$$(1.32)\cdot(0.3714)\cdot(x-1)\cdot\left[\frac{1}{1.32}-\frac{3}{(x-1)}\right] = (1.32)\cdot(0.3714)\cdot(x-1)\cdot\left[\frac{1.734}{(0.3714)\cdot(x-1)}\right]$$

$$(0.3714)\cdot(x-1)-3\cdot(1.32)\cdot(0.3714) = (1.32)\cdot(1.734)$$

$$0.3714\cdot x-0.3714-1.470744 = 2.28888$$

$$x = \frac{2.28888+0.3714+1.470744}{0.3714} = 11.12284 \quad (\textit{Redondeando a 5 decimales}) .$$

Nota: Debido a los procedimientos de redondeo, una verificación de una solución decimal obtenida puede no dar exactamente los mismos valores para ambos lados de la ecuación original . Sin embargo, la diferencia será a menudo muy pequeña . Asi , en el ejemplo anterior, la verificación de la raiz es. . .

$$\left(\frac{1}{1.32}\right)-\frac{3}{(11.12284-1)} \;¿=?\; \frac{1.734}{(0.3714)\cdot(11.12284-1)}$$

$$0.46121623 \;¿=?\; 0.46121648$$

donde la diferencia entre los resultados decimales empiezan a partir de los diezmillonésimos.

EJERCICIO 17.

I. Determinar si todos los valores propuestos para la incógnita x son o no solución de la ecuación dada.

1. $(5\cdot x-3) = (3\cdot x+5)$, $\quad x = 0,-5,4,10$
2. $(7-3\cdot x) = (5\cdot x-17)$, $\quad x = -3,0,8,3$
3. $3\cdot x^2+2\cdot x-5 = 2\cdot x^2-2$, $\quad x = -3,1,4,-5$
4. $5\cdot x^3+6\cdot x^2+3 = 4\cdot x^3+4\cdot x+27$, $\quad x = -2,0,2,6$
5. $\frac{5}{2\cdot(x-1)}-\frac{4}{x-1} = 3$, $\quad x = \left(\frac{1}{2}\right),4,0,\left(\frac{1}{4}\right)$
6. $3+\frac{1}{x+2} = 4$, $\quad x = -2,-1,0,5$
7. $(x+5)\cdot(x-3) = 20$, $\quad x = -7,-5,3,5$
8. $\sqrt[3]{x-8} = 3$, $\quad x = -2,2,8,35$
9. $x^4+3\cdot x^3 = 4\cdot x^2+12\cdot x$, $\quad x = -3,-2,0,2$
10. $3\cdot\sqrt{x}-\frac{8}{\left(\sqrt{x}\right)^3} = 5$, $\quad x = -2,4,8,9$

II. En las siguientes expresiones, determinar cual es una identidad y cual es una ecuación condicional

11. $3\cdot x - 10 = 4\cdot x$

12. $x^2 - 8\cdot x + 5 = (x-4)^2 - 11$

13. $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1$

14. $3 + \frac{1}{x+1} = \frac{4\cdot x}{x+1}$

15. $x^3 + 2\cdot(3\cdot x - 2) = x^2 + 8\cdot(x+2) - 2\cdot x - 20$

16. $\frac{5}{x} + \frac{3}{x} = 24$

17. $4\cdot\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - 6\right] = 4\cdot x^2 - 4\cdot x - 23$

18. $\frac{(t+2)\cdot(t-1)}{t} = \frac{1}{t}\cdot[t\cdot(t+2) - t - 2]$

III . Resolver las siguientes ecuaciones y verificar las soluciones.

19. $4\cdot x = x + 9$

20. $7\cdot x + 2 = 3\cdot x + 14$

21. $9\cdot x - 4 = 3\cdot x - 16$

22. $7\cdot x - 2 = 2\cdot x + 1$

23. $3\cdot x - 2 = 5\cdot x + 6$

24. $7\cdot x - 5 = 4 + 4\cdot x$

25. $3\cdot x - 3 = 2 - 7\cdot x$

26. $7 - 4\cdot x = x - 3$

27. $2\cdot(x+1) - (x-1) = 0$

28. $3\cdot(3\cdot x - 1) + 4\cdot(9 - 5\cdot x) = 0$

29. $6\cdot(4\cdot x - 7) - 5\cdot(2\cdot x + 5) = 3$

30. $2\cdot\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot(3\cdot x - 7)$

31. $4\cdot(3\cdot x - 1) = -7\cdot(-2\cdot x + 3) + 5$

32. $4\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot(4\cdot x + 12) = 4$

33. $3\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot x + \frac{1}{6}\right) - \frac{3}{4}\cdot(2\cdot x + 18) = -4$

34. $6\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot x + \frac{1}{3}\right) + 8\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot x - \frac{3}{4}\right) = 5\cdot x + 4$

35. $\frac{2}{3}\cdot x - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot x = \left(x - \frac{5}{4}\right)$

36. $\frac{3}{2}\cdot x - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\cdot x = \left(\frac{4}{3}\cdot x - \frac{10}{3}\right)$

37. $\frac{5}{6}\cdot x - \frac{7}{9} - \frac{2}{3}\cdot x = \left(\frac{2}{9}\cdot x - \frac{5}{9}\right)$

38. $\frac{3\cdot x}{5} - 5 = \frac{x}{2} - 4$

39. $\frac{2\cdot x}{3} - 3 = \frac{x}{2} - 1$

40. $\frac{x}{5} + 1 = \frac{2\cdot x}{3} - \frac{4}{3}$

41. $5\cdot\frac{x}{7} - 1 = 3\cdot\frac{x}{4} - \frac{5}{4}$

42. $a\cdot x + \frac{b}{a} = b\cdot x + 1$

43. $a\cdot(x-1) = b\cdot(a-x)-a$

44. $a\cdot(x-2)-b\cdot(x-1) = b-a$

45. $a\cdot(x-2) = b\cdot(x+1)-a$

46. $\dfrac{2\cdot x+1}{3} = 3\cdot x-16$

47. $\dfrac{4\cdot x+6}{6} = 12-3\cdot x$

48. $\dfrac{3\cdot x+5}{5} = 2\cdot x-6$

49. $\dfrac{3\cdot x-2}{4}+3 = x-\dfrac{1}{2}$

50. $\dfrac{2\cdot x-3}{3}+4 = \dfrac{3\cdot x-4}{2}$

51. $\dfrac{3\cdot x+5}{4}-\dfrac{2\cdot x-3}{3} = 3$

52. $\dfrac{x+4}{2}-\dfrac{5}{6} = \dfrac{2\cdot x-2}{3}$

53. $\dfrac{2\cdot x-1}{3}-\dfrac{3\cdot x-2}{4} = -\left(\dfrac{11}{12}\right)$

54. $\dfrac{4\cdot x+3}{6}+\dfrac{3\cdot x+1}{4} = 2\cdot x-1$

55. $\dfrac{5\cdot x-2}{6}+\dfrac{4\cdot x+2}{9} = 2\cdot x-3$

56. $\dfrac{6\cdot x-5}{3}+\dfrac{4\cdot x-1}{2} = 3\cdot x-\dfrac{1}{6}$

57. $\dfrac{5\cdot x+7}{6}-\dfrac{x-1}{4} = x-\dfrac{2}{3}$

58. $\dfrac{b\cdot x+a}{a}+\dfrac{b\cdot x-a}{b} = 2$

59. $\dfrac{c\cdot x+d^2}{d}-c = \dfrac{4\cdot d\cdot x-c\cdot d}{c}$

60. $\dfrac{r\cdot x}{s}-\dfrac{s\cdot x}{r} = r-s$

61. $p+p^2\cdot x = q^2\cdot x-q$

62. $\dfrac{x-3}{x+2} = \dfrac{x-2}{x+8}$

63. $\dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{x+4}{x-1}$

64. $\dfrac{2\cdot x-5}{4\cdot x-1} = \dfrac{3\cdot x-4}{6\cdot x+9}$

65. $\dfrac{6\cdot x-8}{9\cdot x+8} = \dfrac{2\cdot x-3}{3\cdot x+2}$

66. $\dfrac{4}{x-3}-\dfrac{3}{x-1} = \dfrac{10}{x^2-4\cdot x+3}$

67. $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x-4} = \dfrac{10}{x^2-3\cdot x-4}$

68. $\dfrac{3}{x-4}-\dfrac{2}{x-3} = \dfrac{6}{x^2-7\cdot x+12}$

69. $\dfrac{5}{x-4}-\dfrac{3}{x-5} = \dfrac{5}{x^2-9\cdot x+20}$

70. $\dfrac{4}{x+4}+\dfrac{6}{2\cdot x+3} = \dfrac{-6}{2\cdot x^2+11\cdot x+12}$

71. $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{2\cdot x-3}=\dfrac{6}{2\cdot x^2-7\cdot x+6}$

72. $\dfrac{5}{x+5}+\dfrac{6}{2\cdot x+5}=-\dfrac{9}{2\cdot x^2+15\cdot x+25}$

73. $\dfrac{3}{2\cdot x-1}-\dfrac{5}{4\cdot x-2}=\dfrac{3}{8\cdot x^2-8\cdot x+2}$

74. $\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{2}{2\cdot x-5}=\dfrac{6}{3\cdot x-13}$

75. $\dfrac{3}{3\cdot x-5}-\dfrac{1}{2\cdot x-3}=\dfrac{2}{4\cdot x-7}$

76. $\dfrac{4}{2\cdot x-3}+\dfrac{5}{5\cdot x-11}=\dfrac{3}{x-5}$

77. $\dfrac{4}{3\cdot x-1}-\dfrac{3}{2\cdot x-1}=\dfrac{-1}{6\cdot x-5}$

78. $\dfrac{2\cdot x-4}{x-3}=3+\dfrac{2}{x-3}$

79. $\dfrac{3\cdot x-7}{x-4}+4=\dfrac{5}{x-4}$

80. $\dfrac{3}{x^2-4}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+1}$

81. $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{7}{x^2-x-6}$

82. $\dfrac{1}{x^2-9}=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+3}$

83. $\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{x-1}{x-3}+\dfrac{x^2-2\cdot x+1}{(x-2)\cdot(x-3)}$

84. $\dfrac{x+3}{x+1}+\dfrac{x+1}{x-3}=\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x^2-3\cdot x-8}{(x-3)\cdot(x+1)}$

85. $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x^2-1}{(x-1)\cdot(x+2)}$

86. $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{2\cdot x}{x+2}+\dfrac{x-2}{(x+1)\cdot(x+2)}$

IV Resolver para la letra indicada a la derecha de cada ecuación :

87. $m=\dfrac{3}{n-a}$, a

88. $1=\dfrac{3\cdot(d+b)}{2+d}$, b

89. $S=\dfrac{L\cdot r-a}{r-1}$, r

90. $x=x_o+v\cdot t+\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$; a

91. $L_2=L_1\cdot(1+\alpha\cdot t)$, t

92. $A=\dfrac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot h$, b

93. $P=\dfrac{W}{2\cdot g\cdot t}\cdot\left[(v_1)^2-(v_2)^2\right]$, t

94. $P=\dfrac{f\cdot V}{V-S}$, S

95. $M=\dfrac{L}{F}\cdot\left(\dfrac{25}{f}+1\right)$, f

EJERCICIO 17. Respuestas (problemas impares)

1. Solo $x = 4$ es solución
3. Solo $x = -3$ y $x = 1$ son soluciones
5. Solo $x = \frac{1}{2}$ es solución
7. Solo $x = -7$ y $x = 5$ son soluciones.
9. Todas son soluciones $x = -3, -2, 0, 2$
11. Igualdad condicional. Solución: $x = -10$
13. Igualdad condicional. Solución: $x = \frac{12}{7}$
15. Igualdad condicional. Solución: $x = 0, 1$
17. Igualdad condicional. Solución: $x = 0$
19. $x = 3$
21. $x = -2$
23. $x = -4$
25. $x = \frac{1}{2}$
27. $x = -3$
29. $x = 5$
31. $x = 6$
33. $x = 18$
35. $x = 6$
37. $x = -4$
39. $x = 12$
41. $x = 7$
43. $x = \frac{a \cdot b}{(a + b)}$
45. $x = \frac{(a + b)}{(a - b)}$
47. $x = 3$
49. $x = 12$
51. $x = 9$
53. $x = 13$
55. $x = 4$
57. $x = 5$
59. $x = \frac{c \cdot d}{(2 \cdot d + c)}$
61. $x = \frac{1}{q - p}$
63. $x = 6$
65. $x = 8$
67. $x = 3$
69. $x = 9$
71. $x = 6$
73. $x = 2$
75. $x = 2$
77. $x = 1$
79. No hay solución
81. No hay solución
83. $x = 0$
85. No hay solución
87. $a = \frac{(m \cdot n - 3)}{m}$
89. $r = \frac{(S - a)}{(S - L)}$
91. $t = \frac{L_2 - L_1}{L_1 \cdot \alpha}$
93. $t = \frac{W}{2 \cdot g \cdot P} \cdot \left[(v_1)^2 - (v_2)^2 \right]$
95. $f = \frac{25 \cdot L}{M \cdot F - L}$

6.4 Problemas de aplicación de las ecuaciones lineales.

Los problemas de la vida real (por supuesto que hablamos sólo de los que pueden ser resueltos matemáticamente), generalmente no están expresados en lenguaje matemático. Un verdadero reto es ***aprender a traducir en proposiciones matemáticas*** la descripción oral o verbal de un problema.

El objetivo de esta sección es dar sugerencias y mostrar procedimientos que le ayudaran a Usted para aumentar su habilidad en este proceso de traducción.
No existe una regla simple para resolver problemas de aplicación si no tenemos una fórmula ; sin embargo las siguientes guías generales pueden ser útiles . . .

GUÍA PARA RESOLVER PROBLEMAS ENUNCIADOS

1. *Lea (y de ser necesario, vuelva a leer) el problema cuidadosamente* y *escriba una ecuación informal o modelo escribiendo las operaciones algebráicas expresadas en palabras, explícita o implícitamente. (Hacer un esquema o dibujo del problema si es posible.)*
2. *Denote por símbolos ó literales las cantidades conocidas y desconocidas .*
3. *Escriba una ecuación algebráica formal substituyendo tales símbolos en la ecuación informal.*
4. *Resuelva la ecuación y verifique la solución.*

NOTA :
Para algunos estudiantes, las dos principales dificultades para resolver problemas enunciados parecen ser :

- *La falta de reconocimiento del vocabulario de las operaciones algebráicas y*
- *El frustrante error de tratar de resolver todo el problema al mismo tiempo (" comerse el pastel de un solo bocado "). La mayoría de los problemas se resuelven por etapas. No espere Usted soluciones mágicas de un solo paso .*

6.4 a) Construcción de Ecuaciones . Problemas de aplicación .

Ya que una ecuación se construye reuniendo una secuencia de operaciones enunciadas, es de vital importancia que Usted reconozca el vocabulario de las expresiones algebráicas. Se enlistan enseguida algunas palabras clave y frases que le ayudarán a identificar las operaciones usadas para construir ecuaciones :

TRADUCIENDO DEL ESPAÑOL AL ÁLGEBRA		
Frases o palabras clave :	**Operación algebraica** :	**Ejemplos**
Igual, igual a, es, son, fue, será, representa lo mismo que.	= *(Igualdad)*	$x^2 - y^2$ *es igual a* $(x-y)\cdot(x+y)$
Suma, más, mayor que, se incrementa en, sumado a, junto con, excede, total de.	+ (Suma)	*Si el salario de Saúl que actualmente es $22 400 , se incrementa en un 9 % , ¿Cuál será su nuevo salario ?* *Ecuación informal :* *(Salario) + 9 %(Salario) = (Salario nuevo)*

Diferencia , menos , menor , decrece por , se resta de , reducido por , el resto de .	$-$ *(Resta)*	*Toda la mercancía de una tienda tiene precios reducidos en un 35 % . Hallar el precio original de un artículo que cuesta \$ 36.75* *Ecuación informal :* *(Precio) – 35 %(Precio) = (36.75)*
Veces , por ciento de , por, multiplicado por, producto, el doble, el triple, etc.	x *(Multiplicación)*	*Si \$ 557 representa el 23 % del sueldo mensual de Laura , Hallar su salario mensual .* *Ecuación informal :* *(Salario) · 23 % = 557*
Razón , cociente , dividido por , la división de ,	$\div$, / *(División)*	*Cierto número es 16 unidades mayor que el doble de otro y la razón de ambos es 6 .* *Ecuación informal :* *(Número mayor) ÷ (Número menor) = 6*

Ejemplo 1. Un número es un tercio de otro número, si su diferencia es 28, hallar los dos números.

Solución:

1° Si leemos el problema con cuidado, encontraremos la siguiente relación. . .

Ecuación informal : $(Primer\_número) - (Segundo\_número) = 28$

2° *Símbolos* : $(Primer\_número) = x$; $(Segundo\_número) = \frac{x}{3}$

3° *Ecuación algebráica* : $x - \left(\frac{x}{3}\right) = 28$

4° Resolviendo éta ecuación se obtiene $x = 42$. Por lo tanto, el otro número buscado es $\frac{x}{3} = 14$

Ejemplo 2. Un rectángulo es dos veces mas largo que ancho y su perímetro es 132 *cm*. Hallar sus dimensiones.

Solución:

1° El perímetro de un polígono es la suma de la longitud de sus lados, asi que para un rectángulo . . .

Ecuación informal : $(Largo + Ancho) \times 2 = 132 \cdot cm$

2° *Símbolos* : $(Ancho) = A$; $(Largo) = 2 \cdot A$

3° *Ecuación algebráica* : $(2 \cdot A + A) \times 2 = 132 \cdot cm$

4° Resolviendo ésta ecuación se obtiene . . . $A = \dfrac{\left(\dfrac{132 \cdot cm}{2}\right)}{6} = 22 \cdot cm$, de modo que

el largo del rectángulo es : $2 \cdot A = 44 \cdot cm$

Muchos problemas de aplicación incluyen porcentajes , descuentos , distancias , interés simple , mezclas y trabajo. Usted notará en los ejemplos siguientes que la clave de la solución es el entendimiento del modelo básico (la ecuación informal) que relaciona las operaciones algebráicas .

Ejemplo 3. (***Porcentajes y descuentos***) Un porcentaje es una fracción cuyo denominador es 100. Representa la fracción de un número entero expresado en centésimas.
Para calcular el porcentaje p de un número A a otro B, se divide el primero por el segundo. . .

$$\boxed{p = \frac{A}{B}}$$

- a) ¿ Qué porcentaje de \$ 250 es \$ 85 ?
- b) ¿ De que número es 200 el 110% ?
- c) En un remate, los artículos están reducidos por 45% . ¿ Qué precio original tenía un radio-reloj que cuesta ahora solo \$ 41.25 ?

Solución:

a) 1° *Ecuación informal* : $(Porcentaje) = \dfrac{85}{250}$

2° *Símbolos* : $Porcentaje = p$ (*escrito en forma decimal*)

3° *Ecuación algebráica* : $p = \dfrac{85}{250}$

4° *Solución* : $p = \dfrac{85}{250} = 0.34 = \dfrac{34}{100} = 34\%$.

b) 1° *Ecuación informal* : $(110\%) = \dfrac{200}{(Número\_buscado)}$

2° *Símbolos* : $Número\_buscado = x$

3° *Ecuación algebráica* : $\left(\dfrac{110}{100}\right) = \dfrac{200}{x}$

4° *Solución* : $x = 200 \cdot \left(\dfrac{10}{11}\right) = 181.818$

c) 1° *Ecuación informal* : $(Precio\_original) - (Descuento) = (Precio\_de\_venta)$

2° *Símbolos* : $(Precio\_original) = x$; $(Descuento) = (0.45)\cdot x$

3° *Ecuación algebráica* : $x - \frac{45}{100}\cdot x = 41.25$

4° *Solución* : $x = \frac{4125}{55} = 75$. Asi que el precio original es \$ 75.00

Ejemplo 4 (***Problemas de distancia***). La ecuación para describir un movimiento uniforme

$$d = v\cdot t$$

donde los símbolos d , v y t representan respectivamente la distancia recorrida, la velocidad del objeto que se mueve y tiempo transcurrido al recorrer tal distancia, conducen generalmente a problemas que se resuelven con ecuaciones lineales.

- a) Luis y Pablo participan en una carrera de $10\cdot km$. Luis corre a 12 *kilómetros por hora* ($12\cdot\frac{km}{h}$) y Pablo a 10 kilómetros por hora ($10\cdot\frac{km}{h}$) . Si ambos corredores parten del mismo lugar, ¿En cuanto tiempo será la separción entre ambos de $\frac{2}{3}\cdot km$?
- b) Lupe viajo 20 kilómetros en bote río abajo (a favor de la corriente del rio) en el mismo tiempo que le tomó viajar 12 kilómetros navegando río arriba (en contra de la corriente del rio). Si la velocidad del bote en aguas tranquilas es 10 kilómetros por hora ($10\cdot\frac{km}{h}$), ¿Cuál es la rapidez de la corriente del río?

a) *Solución* . Luego de una lectura cuidadosa , podemos ver que el modelo apropiado para la solución de éste problema es :

1° *Ecuación informal* :

$$(Distancia\_recorrida\_por\_Luis) - (Distancia\_recorrida\_por\_Pablo) = \left(\frac{2}{3}\cdot km\right)$$

2° *Símbolos* : $Distancia\_recorrida\_por\_Luis = D_L$

$(Distancia\_recorrida\_por\_Pablo) = D_P$

$(Tiempo\_trascurrido) = t$

3° *Ecuación algebráica* : $\left(12\cdot\frac{km}{h}\right)\cdot T - \left(10\cdot\frac{km}{h}\right)\cdot T = \frac{2}{3}\cdot km$

4° *Solución* : $t = \dfrac{\frac{2}{3}km}{(12-10)\cdot\frac{km}{h}} = \frac{1}{3}\cdot h$

Esto significa que desde el momento de la partida han transcurrido $t = \frac{1}{3}\cdot(60\cdot min)$

$= 20\cdot min$ cuando la separción entre los corredores de de $\frac{2}{3}\cdot km$

b) <u>*Solución*</u> . La clave de la solución de éste problema es que se viaja en ambas direcciones durante el mismo tiempo, de lo cual se obtiene el modelo ::

1° *Ecuación informal* :

$(Tiempo\_de\_viaje\_rio\_arriba) = (Tiempo\_de\_viaje\_rio\_abajo)$

2° *Símbolos* : $(Rapidez\_de\_la\_corriente) = \boldsymbol{u}$

$(Rapidez\_del\_bote\_en\_agua\_tranquila) = V = 10\cdot\frac{km}{h}$

$(Rapidez\_del\_bote\_rio\_abajo) = V + \boldsymbol{u}$

$(Rapidez\_del\_bote\_rio\_arriba) = V - \boldsymbol{u}$

$(distancia\_rio\_abajo) = 12\cdot km = d_1$

$(distancia\_rio\_arriba) = 10\cdot km = d_2$

3° *Ecuación algebráica* : $\dfrac{d_1}{V+\boldsymbol{u}} = \dfrac{d_2}{V-\boldsymbol{u}}$

4° *Solución para* $\boldsymbol{u}$.

$$\boldsymbol{u} = V\cdot\frac{(d_1 - d_2)}{(d_1 + d_2)} = \left(10\cdot\frac{km}{h}\right)\cdot\left(\frac{20\cdot km - 12\cdot km}{12\cdot km + 20\cdot km}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{km}{h}$$

<u>*Ejemplo*</u> 5 . (***Interés simple***) Los problemas de interés simple se basan en el modelo:

$$(\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{I})$$

donde los símbolos $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{I}$ representan respectivamente la tasa de interés periódica, el capital invertido y el interés generado en un periodo

Eric invierte \$ 10, 000 en dos partes. Una parte esta al 9.5% anual y el resto al 11% anual .¿Cuánto está invertido en cada parte si recibe \$ 1 038.50 de interés simple por año?

1° *Ecuación informal*:

$(Interés\_1) + (Interés\_2) = (Interés\_total)$

2° *Símbolos* : $(tasa\_1) = 9.5\% = r_1$

$(tasa\_1) = 11\% = r_2$

$(Capital\_total) = C = 10000$

$(Interés\_total) = I_T = 1038.50$

$(Capital\_1) = \boldsymbol{C}_1$; $(Interés\_1) = r_1 \cdot \boldsymbol{C}_1$

$(Capital\_2) = \boldsymbol{C}_2 = C - \boldsymbol{C}_1$; $(Interés\_2) = r_2 \cdot \boldsymbol{C}_2$

3° *Ecuación algebráica* : $r_1 \cdot \boldsymbol{C}_1 + r_2 \cdot \boldsymbol{C}_2 = I_T$

$$r_1 \cdot \boldsymbol{C}_1 + r_2 \cdot \left(C - \boldsymbol{C}_1\right) = I_T$$

4° *Solución para* $\boldsymbol{C}_1$.

$$\boldsymbol{C}_1 = \frac{\left(I_T - r_2 \cdot C\right)}{\left(r_1 - r_2\right)} = \frac{1038.50 - (0.11) \cdot (10000.00)}{(0.095) - (0.11)} = 4100.$$

Asi que el capital está dividido en \$ 4100 al 9.5% y \$ 10000.00 – \$ 4100 = \$5900 al 11%

<u>*Ejemplo*</u> 6 . (***Mezclas***) Los problemas de mezcla usualmente obedecen el modelo :

$$\left(\boldsymbol{p}_1\right) \cdot \left(\boldsymbol{C}_1\right) + \left(\boldsymbol{p}_2\right) \cdot \left(\boldsymbol{C}_2\right) + \left(\boldsymbol{p}_3\right) \cdot \left(\boldsymbol{C}_3\right) + \ldots\ldots\ldots = (\boldsymbol{P}) \cdot (\boldsymbol{C})$$

donde los símbolos $\boldsymbol{p_i}$, $\boldsymbol{C_i}$ representan el porcentaje y la cantidad *i-ésima* de la substancia en la mezcla , mientras que $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{C}$ representan el porcentaje final de la mezcla y la cantidad total de substancia en la mezcla respectivamente.

- a) Un farmacéutico necesita reforzar una solución de alcohol de 15% hasta un 32% . ¿Cuánto alcohol puro debe agregar a la solución al 15% si ésta tiene un volumen de $200 \cdot ml$ (mililítros) ?

- b) El inventario de una tienda es \$ 30 000.00 en Televisores de 12" y de 19" . La ganancia en los TV de 12 pulgadas es 22% , mientras que en los de 19 pulgadas es 40% . Si la ganancia total es el 35% del capital invertido, ¿Cuánto se invirtió en cada tipo de televisores ?

a) <u>*Solución*</u> . En este caso se tiene la ecuación informal :

1° $(15 \cdot \%) \cdot (Cantidad\_de\_alcohol\_al\_15\%) + (100 \cdot \%) \cdot (Cantidad\_de\_alcohol\_puro) =$

$$= (32 \cdot \%) \cdot (Cantidad\_total\_de\_alcohol)$$

2° *Símbolos*: $(Cantidad\_de\_alcohol\_al\_15\%) = C_1$

$(Cantidad\_de\_alcohol\_puro) = \boldsymbol{x}$

$(Cantidad\_total\_de\_alcohol) = C_1 + \boldsymbol{x}$

3° *Ecuación algebráica* : $\left(\frac{15}{100}\right)\cdot C_1 + \left(\frac{100}{100}\right)\cdot \boldsymbol{x} = \left(\frac{32}{100}\right)\cdot (C_1 + \boldsymbol{x})$

4° Resolviendo para $\boldsymbol{x}$ queda :

$$\boldsymbol{x} = \frac{\left(\frac{32-15}{100}\right)\cdot C_1}{1 - \frac{32}{100}} = \frac{17}{68}\cdot C_1 = \frac{1}{4}\cdot(200\cdot ml) = 50\cdot ml$$

Es decir, el farmacéutico debe agregar de alcohol puro a su solución inicial .

b) <u>*Solución*</u> . En este caso se tiene la ecuación informal :

1° $(22\cdot\%)\cdot(Cantidad\_en\_TV\_de\_12\_plg) + (40\cdot\%)\cdot(Cantidad\_en\_TV\_de\_19\_plg) =$

$= (35\cdot\%)\cdot(Cantidad\_total\_inventario)$

2° *Símbolos*: $Cantidad\_total\_inventario = C$

$(Cantidad\_en\_TV\_de\_12\_plg) = \boldsymbol{C_1}$

$(Cantidad\_en\_TV\_de\_19\_plg) = \boldsymbol{C_2} = C - \boldsymbol{C_1}$

3° *Ecuación algebráica* : $\left(\frac{22}{100}\right)\cdot \boldsymbol{C_1} + \left(\frac{40}{100}\right)\cdot(C - \boldsymbol{C_1}) = \left(\frac{35}{100}\right)\cdot(C)$

4° Resolviendo para $\boldsymbol{C_1}$ queda :

$$\boldsymbol{C_1} = \frac{\left(\frac{40-35}{100}\right)\cdot C}{\left(\frac{40-22}{100}\right)} = \frac{5}{18}\cdot C = \frac{5}{18}\cdot(30{,}000) = 8{,}333.33$$

Asi que en los televisorres de 12" se tiene un capital invertido de $ 8 333.33 y en los modelos de 19" se invirtió $ 21 666.66

<u>*Ejemplo*</u> 7 . (***Trabajo***) Los problemas en los que se debe completar una labor o trabajo se ajustan al modelo :

$$(\boldsymbol{r_1})\cdot(\boldsymbol{T_1}) + (\boldsymbol{r_2})\cdot(\boldsymbol{T_2}) + (\boldsymbol{r_3})\cdot(\boldsymbol{T_3}) + \ldots\ldots\ldots\ldots = 1$$

donde $\boldsymbol{r_i}$ representa la razón de trabajo del *i-ésimo* elemento que trabaja y el , $\boldsymbol{T_i}$ es el tiempo que trabajó. La razón iésima se calcula como. . .

$$\boldsymbol{r_i} = \frac{1}{(Tiempo\_que\_dura\_el\_elemento\_iésimo\_en\_realizar\_solo\_todo\_el\_trabajo)}$$

- Usando una podadora, José podría podar un jardín en 6.5 horas. Luego de podar por 2 horas, el vecino de José le ayuda con su tractor. Juntos terminan el trabajo 1 hora y 15 minutos después . ¿Cuánto tiempo le tomaría al tractor podar solo todo el jardín ?.

Solución . En este caso se tiene la ecuación informal :

1° $\left(\frac{1}{6.5\cdot h}\right)\cdot(Tiempo\_que\_trabajó\_José)+(razón\_de\_trabajo\_de\_la\_podadora)\cdot(1.25\cdot h)=1$

2° *Símbolos*: $(Tiempo\_que\_trabajó\_José)=T_j=(2\cdot h)+(1\cdot h+25\cdot min)=\frac{13}{4}\cdot h$

$(razón\_de\_trabajo\_del\_Tractor)=r_T$

$(razón\_de\_trabajo\_de\_José)=\frac{1}{6.5\cdot h}=\left(\frac{2}{13}\right)\cdot\frac{1}{h}$

3° *Ecuación algebráica* : $\left(\frac{2}{13\cdot h}\right)\cdot\left(\frac{13}{4}\cdot h\right)+(r_T)\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot h\right)=1$

4° Resolviendo para r_T queda :

$$r_T=\frac{1-\frac{1\cdot h}{2\cdot h}}{\left(\frac{5}{4}\cdot h\right)}=\frac{1}{\frac{5}{2}\cdot h}$$

Asi que trabajando solo, el tractor haría todo el trabajo en $\frac{5}{2}\cdot h=2\cdot h+30\cdot min$

<u>EJERCICIO</u> 18 .

I . Resolver la ecuación lineal para la variable indicada .

1. $A=-b\cdot h$, resolver para h
2. $P=2\cdot L+2\cdot a$, resolver para L
3. $V=L\cdot A\cdot h$, resolver para h
4. $V=2\cdot p\cdot r\cdot h$, resolver para h
5. $S=C+R\cdot C$, resolver para C
6. $S=R-R\cdot L$, resolver para L
7. $A=P+P\cdot r\cdot t$, resolver para r
8. $A=\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot h$, resolver para b
9. $A=P\cdot\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n\cdot t}$, resolver para t
10. $A=\frac{\pi\cdot r^2\cdot\theta}{2\cdot\pi}$, resolver para θ
11. $A=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h^2\cdot(3\cdot r-H)$, resolver para h
12. $V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot a^2\cdot b$, resolver para a
13. $C=\frac{1}{\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)}$, resolver para C_1
14. $L=\frac{1}{\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\frac{1}{L_3}\right)}$, resolver para L_3

15. $H = K \cdot \dfrac{A \cdot (T_1 - T_2)}{L}$, resolver para T_1

16. $\dfrac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2} \right)$, resolver para R_1

17. $S = \dfrac{n}{2} \cdot [\, 2 \cdot a + (n-1) \cdot d \,]$, resolver para a

18. $S = \dfrac{r \cdot L - a}{r - 1}$, resolver para r

19. $F = G \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$, resolver para m_1

20. La suma de dos números naturales consecutivos es 525 Hallar tales números .

21. La suma de tres números naturales consecutivos es 804 ¿ Cuáles son esos números ?

22. Un número es cinco veces otro y su diferencia es 148 ¿ Cuáles son esos números ?

23. El pago de Liz es $ 45 mayor que el de Paz y ambos pagos totalizan $ 627. Hallar los pagos de cada quién.

24. Un estudiante debe promediar al menos 90 en un curso para obtener una *A* . ¿ Qué calificación debe obtener en el último examen para obtener una *A* si las anteriores son 87 , 92 y 84 ?

25. Repetir el ejercicio 24 suponiendo que el examen final cuenta el doble que todos los anteriores.

26. ¿ Cuál es el 30% de 45?

27. ¿ Cual es el 175% de 360 ?

28. ¿ Cuál es el 0.045% de 2,650,000 ?

29. ¿ Qué porcentaje de 1600 es 432 ?

30. ¿ De que número es 12 el 0.5% ?

31. ¿ De que número es 825 el 250% ?

32 Una familia paga al año por préstamos $13,077.75 , que representan el 58.6% de sus ingresos. ¿ Cuanto es su ingreso anual ?

33. El precio de venta de un articulo tiene el 16.5 % de descuento y es $ 849. Hallar su precio de lista .

34. En un grupo de 35 estudiantes había 10 mujeres menos que el doble de hombres. ¿ Cuántas mujeres había en ese grupo ?

35. Dos grupos de futbolistas deben viajar 135 kilómetros para llegar a cierta cancha. El primer grupo sale a tiempo y viaja en promedio a 45 *km/h*. El segundo sale media hora mas tarde que el primero. ¿ Cuál debe ser su velocidad promedio para llegar al mismo tiempo que el primer grupo ?.

36. Hallar el tiempo en minutos que necesita la luz para viajar del Sol a la Tierra si su velocidad es 3×10^8 *m/seg* y la distancia media al Sol es 1.5×10^{11} *m* .

37. Hallar la distancia a una estrella que está a 50 *años-luz* (1 *año-luz* = distancia que recorre la luz durante viajando a 3×10^8 *m/seg*)

38. Paco tiene $ 175 en billetes de $ 10 y de $ 5 . Si tiene en total 23 billetes, ¿cuántos tiene de cada denominación ?

39. Juan invirtió \$ 12 000 en un fondo que le paga el 9.5 % de interés anual simple y \$ 8 000 en un fondo donde la tasa de interés es variable. Al final del año se le indica que su ganancia neta de intereses fué \$ 2 054.40. Hallar la tasa de interés simple equivalente del fondo de tasa variable .

40. Juana tenia 30 años cuando nació su hija Ruth. ¿Cuál será la edad de Ruth cuando . . .
- su edad sea un tercio de la de su madre ?
- sus edades combinadas totalicen 100 años ?

41. Un barril de 55 litros contiene una mezcla con una concentración al 40 % . ¿Cuánto de esta mezcla debe ser extraído y reemplazado por un concentrado 100% puro para que la mezcla final tenga una concentración al 75 % ?

42. Un ranchero mezcla gasolina con aceite para tener 2 litros de la mezcla necesaria para cierto motor. Si la mezcla quedó de 32 partes de gasolina por una de aceite, ¿Cuánta mas gasolina debe agregarse para que la mezcla quede de 40 partes de gasolina por 1 de aceite ?

43. Para cosechar un campo usando un tractor A se necesitan 4 horas. Usando en cambio el tractor B , se puede cosechar todo el campo en un tiempo de 5 horas. ¿ En cuanto tiempo se cosecharía el campo si se usan ambos tractores ?

44. En el ejercicio anterior, ¿Cuánto trabajaría cada tractor si B empieza media hora mas tarde que A ?

45. Con dos bombas A y B se puede llenar un gran depósito. Funcionando solamente la bomba A , el depósito se llena en 5 horas y cuando solo funciona la bomba B , el llenado se completa en 8 horas. Si ambas bombas funcionan simultáneamente, ¿en cuanto tiempo se llenará el deposito ?

46. En el ejercicio 45 anterior, ¿cuánto tiempo trabajara cada bomba si la mas rápida empieza 90 minutos después que la otra ?

47. En el ejercicio 45, suponer que la bomba lenta se usa para vaciar el depósito y la rápida para llenarlo. Si funcionan simultáneamente, estando vacío inicialmente el depósito, ¿ en cuánto tiempo se llenará ?.

48. En una escuela , la mitad de los alumnos menos seis, poseen automóvil. Si el total de automóviles de los alumnos es 35, ¿ cuántos alumnos hay en la escuela ?

49. Si un automovilista recorre 75 *km* más, estará a la mitad de su viaje, del cual ya ha recorrido la tercera parte. ¿ Qué distancia total recorre el automovilista en su viaje completo?

50. Una joven pagó \$ 354.00 por un vestido y un sombrero. Determínese el precio de cada artículo si el vestido costó \$ 128.00 más que el sombrero.

51. En la ciudad, cierto automóvil recorre 6 *km* por litro de combustible consumido ; en cambio en carretera rinde 8.5 *km* por litro. Si el automóvil consumió 90 litros de combustible en un recorrido combinado de 675 *km* , ¿ cuántos kilómetros recorrió en la ciudad ?

52. Al principiar una fiesta había tres veces más mujeres que hombres. 75 mujeres se fueron temprano a sus casas y 150 hombres llegaron tarde a la fiesta con lo cual el número de hombres fué el doble que de mujeres. ¿ Cuántos hombres y mujeres había al principio en la fiesta ?.

53. Santiago es cuatro veces mayor que Juan y dentro de cuatro años más, la edad de Santiago será el doble de la edad de Juan. ¿ Cuál es la edad actual de cada uno ?

54. Samuel salió de la ciudad en su automóvil. Una hora más tarde, Tomás partío con el mismo rumbo manteniendo una velocidad 25 % mayor que la de Samuel, a quien dió alcance después de recorrer 400 *km* Determinar las velocidades de cada uno, (suponiendo que se mantienen constantes todo el tiempo) .

55. Un caminante mantuvo una velocidad constante de 2 *km./h* al subir una cuesta ; pero durante el regreso, al bajar la cuesta, su velocidad media fué de 5 *km./h* empleando en éste recorrido un tiempo de 2 horas y 24 minutos menos que durante la subida de la cuesta. ¿ Qué distancia recorrió el caminante al subir la cuesta ?

56. Un cartero tiene a su cargo una ruta cerrada de 99 *km* de longitud total, la cual recorre a la velocidad promedio de 12 *km./h* . Una mañana, 3 horas y 36 minutos después de haber salido a su ruta, sale en su busca un compañero que desea entregarle un mensaje urgente, moviéndose a la velocidad promedio de 50 *km./h*. Para entregarle el mensaje en el menor tiempo posible, ¿ debe ir por la ruta tras el cartero o a su encuentro por la otra dirección ?. ¿ En cuánto tiempo llega a él ?

57. Un grupo de 3 personas pueden hacer un trabajo en 6 *horas* , en tanto que si el grupo es de 4 personas, pueden realizar la misma cantidad de trabajo en sólo 4 horas. Si durante una hora trabajan tres personas y luego se les une una cuarta, ¿ cuánto tiempo más tardarán en terminar el trabajo ?
(*Suponga que cada persona del grupo tiene la misma eficiencia laboral*)

58. Un hombre puede pintar una cerca en 8 *horas* . Su hijo mayor, trabajando solo puede hacerlo en 10 *horas* y su hijo menor en 12 *horas*. El trabajo lo iniciaron juntos, pero después de 2 *horas*, el hijo menor se retiró y cosa igual hizo el hijo mayor al cumplirse 3 horas de trabajo. ¿Cuánto tiempo le llevó al padre completar el trabajo ?

59. Hugo, Paco y Luis deben pintar su cuarto. Cada uno de ellos podría hacerlo en 10 horas ; pero Hugo empezó a pintar a las 9:00 AM, Paco se le unió a las 9:30 AM y Luis empezó a ayudarles a las 10:00 AM ¿A qué hora terminarán de pintar ?

60. Una piscina se puede llenar en 6 *horas* con el agua que recibe de un tubo y se puede vaciar en 8 *horas* abriendo la válvula de drenaje. Se empieza a llenar la piscina vacía; pero a las tres horas se descubre que por descuido, la válvula de drenaje está abierta. Si se cierra ésta válvula en ese momento. ¿ En cuánto tiempo más terminará de llenarse la piscina ?

61. Una florista vende un ramo de dos docenas de flores en $ 7.50 . El ramo está formado de rosas, de precio $ 5.00 por docena y de claveles de precio $ 3.00 por docena.
¿ Cuántas flores de cada especie debe poner para formar el ramo ?

62. ¿ Cuántos litros de solución de sal al 25 % se deben mezclar con 10 litros de otra solución de sal al 15 % para producir una tercera solución al 17 % ?

63. Cierta solución de insecticida debe contener por norma 0.9 % de insecticida. Por error se mezcla con otra solución quedando al 0.5 % de concentración de insecticida y se guarda en frascos de 8 litros de capacidad cada uno. ¿ Cuántos litros habrá que sacar en cada frasco y substituirlos por una solución que contiene 16.5 % de insecticida para obtenr la concentración normal ?

64. Un químico mezcla 60 cm^3 de una solución de ácido al 10 % , con 40 cm^3 de otra solución del mismo ácido al 15 % . De la solución asi formada quita una parte y la subtituye por agua destilada produciéndo una solución de ácido al 7.2 % . ¿ Cuántos cm^3 de agua usó ?

65. En un viaje de 535 *km* , una persona empleó 5 *horas* manejando bajo la lluvia y 4 *horas* manejando en tiempo despejado. La velocidad media en el tramo lluvioso fué 10 *km./h* menor que la velocidad media en el tramo seco. ¿ A qué velocidad media viajó en el tramo lluvioso ? .

66. En una hora, una persona recorre 5 *km* en automóvil y 30 *km* en tren. Si la velocidad media del tren es el doble que la velocidad media del automóvil, ¿ cuánto vale su velocidad media en automóvil ?

67. Un pescador rema 4 *km* rio abajo en el mismo tiempo en que rema 1 *km* rio arriba. Si la velocidad de la corriente del rio es 3 *km./h* , ¿con qué velocidad podría remar el pescador en aguas tranquilas ?

EJERCICIO 18 . *Respuestas* (*problemas impares*)

1. $h = \frac{-A}{b}$

3. $h = \frac{V}{(L \cdot A)}$

5. $C = \frac{S}{(1+R)}$

7. $r = \frac{(A-P)}{(P \cdot t)}$

9. $t = \frac{ln\left(\frac{A}{P}\right)}{n \cdot ln\left(1+\frac{r}{n}\right)}$

11. $h = \frac{\sqrt{3 \cdot A}}{\sqrt{\pi \cdot (3 \cdot r - H)}}$

13. $C_1 = \frac{C \cdot C_2}{C_2 - C}$

15. $T_1 = \frac{H \cdot L}{K \cdot A} + T_2$

17. $a = \frac{S}{n} - \frac{(n-1) \cdot d}{2}$

19. $m_1 = \frac{F \cdot r^2}{G \cdot m_2}$

21. 267 , 268 , 269

23. \$ 291 ; \$ 336

25. 93.5

27. 630

29. 27%

31 330

33. \$ 1016.76

35. $54 \cdot \frac{km}{h}$

37. $4.73 \times 10^{17} \cdot m$

39. 0.11425 = 11.425%

41. $32.08 \cdot litros$

43. 2 h 13 min 20 seg

45. 3 h 4 min 37 seg

47. 13 h 20 min

49. $450 \cdot km$

51. $216 \cdot km$

53. Juan tiene 2 años

55. $8 \cdot km$

57. 3 h 45 min

59. A las 12:50

61. 9 rosas y 15 claveles

63. $200 \cdot ml$

65. $55 \cdot \frac{km}{h}$

67. $5 \cdot \frac{km}{h}$

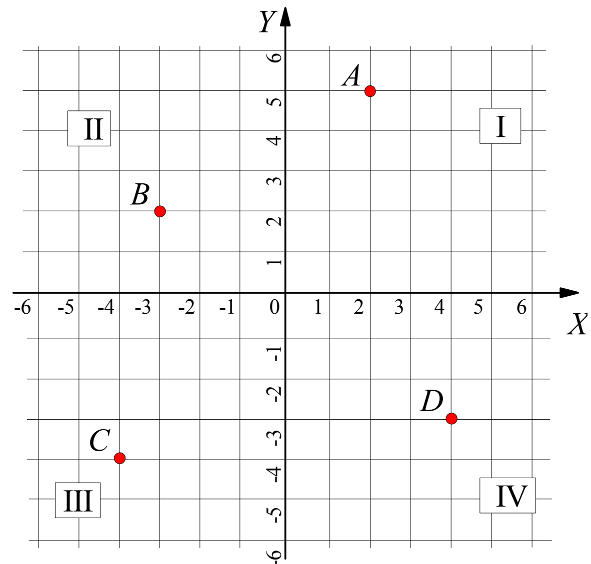
6.5 <u>Representación gráfica de una ecuación lineal</u> .

El llamado **plano cartesiano XY** ó **sistema de coordenadas rectangulares** está formado por *:*

- *dos rectas numéricas mutuamente perpendiculares una horizontal (llamda el eje X) y otra vertical (llamada el eje Y), que se cortan en un cero común llamado origen*
- *la escala numérica en ambas rectas es arbitraria y puede ser distinta an ambas; pero se escoje de modo que los números reales positivos queden a la derecha del cero sobre la recta horizontal o eje X y arriba del cero sobre la recta vertical o eje Y.*
- *de esta manera, a cada punto del plano XY se le asocian dos números, llamados coordenadas XY , que se denotan por la pareja ordenada* $(x\,,y)$ *y que representan la distancia de tal punto al origen, sobre cada una de las rectas numéricas o ejes de coordenadas.*
- *la distancia perpendicular al eje X hasta un punto del plano se llama coordenada* y *o también <u>ordenda</u>. Ésta distancia es positiva o negativa según se mida hacia arriba o hacia abajo del cero sobre ele eje Y*
- *la distancia perpendicular al eje Y hasta un punto del plano se llama coordenada* x *o también <u>abscisa</u>. Ésta distancia es positiva o negativa según se mida hacia la derecha o hacia la izquierda del cero sobre ele eje X*

De esta manera, como se indica en la figura de la derecha, los ejes de coordenadas rectangulares dividen al plano en 4 regiones o cuadrantes, que se han denominado:

- <u>*cuadrante*</u> I : en el cual las dos coordenadas de un punto son positivas $(.+x\,,.+y)$
- <u>*cuadrante*</u> II : en el que la ordenada y de un punto es positiva y la abscisa x es negativa $(.-x\,,.+y)$.
- <u>*cuadrante*</u> III : en el cual ambas coordenadas son negativas $(.-x\,,.-y)$
- <u>*cuadrante*</u> IV en el que la abscisa x es positiva y la ordenada y es negativa $(.+x\,,.-y)$

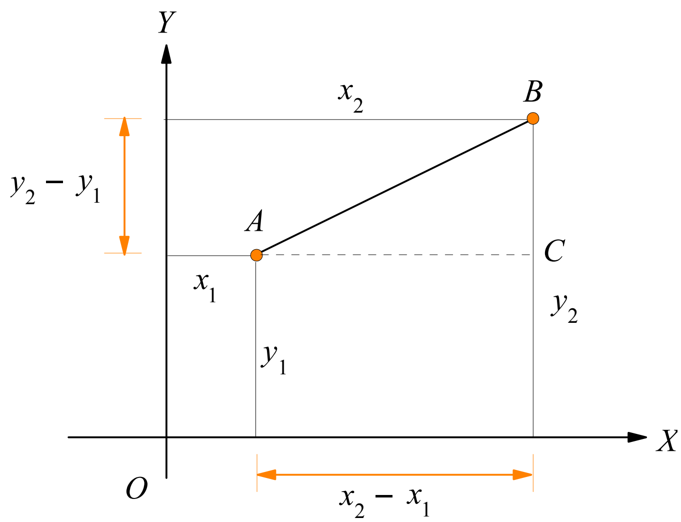


Cuando un punto del plano se localiza por sus coordenadas $(x\,,y)$, se dice que se ha representado gráficamente. Asi por ejemplo, en la figura anterior se han representado los puntos *A*: $(2\,,5)$, *B:* $(-3\,,2)$, *C:* $(-4\,,-4)$ y *D:* $(4\,,-3)$ en los cuadrantes I , II, III y IV respectivamente y aunque sólo se han empleado números enteros para simplificar su representación, las coordenadas de un punto pueden ser cualquier número real.

Ahora resulta relativamente simple determinar la distancia entre dos puntos *A* y *B* del plano, que tengan coordenadas $(x_1\,,y_1)$ y $(x_2\,,y_2)$ respectivamente, como se indica gráficamente enseguida. . .

Aunque los puntos A y B pueden estar localizados en cualquier parte del plano, por sencillez, coloquémoslos en el primer cuadrante.

La distancia horizontal entre los puntos A y B es entonces $AC = (x_2 - x_1)$, y su separación vertical es $CB = (y_2 - y_1)$.



Además, puesto que los ejes de coordenadas son perpendiculares entre si, el triángulo formado por los segmentos rectilíneos AB , AC y CB es rectángulo, por lo cual es posible aplicarle el Teorema de Pitágoras obteniéndose . . .

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2$$

de modo que la distancia AB es . . .

$$AB = \sqrt{(AC)^2 + (CB)^2} = \boxed{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Por otra parte, se define la ***pendiente*** m del segmento rectilíneo AB como la razón o cociente de la distancia vertical a la distancia horizontal que separe a los puntos A y B como sigue :

$$m = \frac{CB}{AC} = \boxed{\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)}$$

Este parámetro mide la "verticalidad" de un segmento rectilíneo, cuanto mayor sea la pendiente, más "vertical" será el segmento de modo que los segmentos que son casi horizontales tienen una pendiente muy pequeña.
Debe notarse que a diferencia de la distancia entre los dos puntos, la cual es una cantidad siempre positiva, la pendiente entre ellos puede ser un número positivo o negativo.
De manera general, considerando que $x_2 > x_1$ es decir que $(x_2 - x_1) > 0$, entonces cuando $(y_2 > y_1)$, la pendiente entre los puntos A y B será positiva y el segmento AB estará inclinado "hacia la derecha" ; pero si $y_2 < y_1$, la pendiente entre ellos será negativa y el segmento AB estará inclinado "hacia la izquierda" .

<u>*Ejemplo*</u> 1 . Calcular la distancia entre los puntos A: $\left(\frac{-2}{3}, \frac{7}{4}\right)$ y B: $\left(\frac{7}{3}, \frac{-9}{4}\right)$, asi como la pendiente entre ellos.

<u>*Solución*</u>: Por aplicación directa de la fórmula para la distancia se obtiene . . .

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\left[\frac{7}{3} - \left(\frac{-2}{3}\right)\right]^2 + \left(\frac{-9}{4} - \frac{7}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

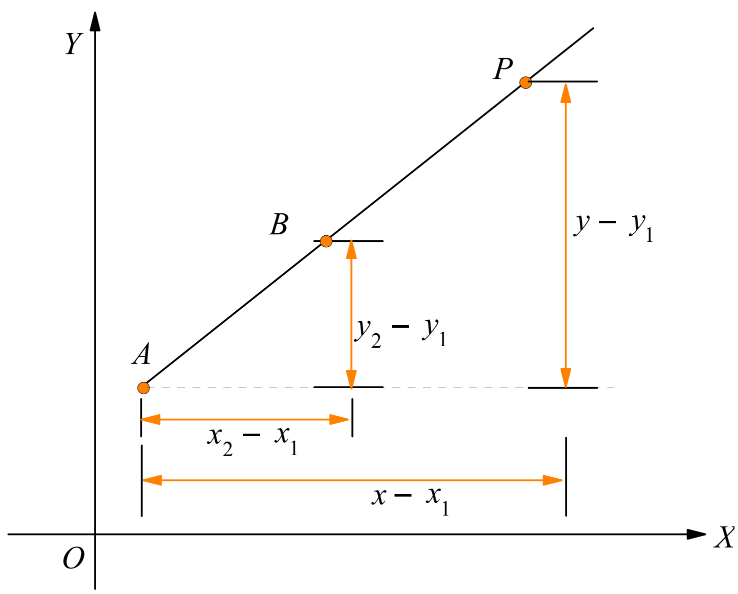
la pendiente entre esos dos puntos es por definición:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\left(\frac{-9}{4} - \frac{7}{4}\right)}{\left[\frac{7}{3} - \left(\frac{-2}{3}\right)\right]} = \left(\frac{-4}{3}\right)$$

y por ser un número negativo indica que el segmento *AB* está inclinado hacia la izquierda en el plano cartesiano, como puede verificarse al localizar gráficamente éstos puntos en el plano.

Consideremos ahora dos puntos fijos $A : (x_1 , y_1)$ y $B : (x_2 , y_2)$ y un tercer punto variable $P : (x , y)$ que estén todos sobre la misma línea recta.

Geométricamente es evidente que la pendiente entre los puntos A y B tiene el mismo valor que entre los puntos A y P ó que entre los puntos B y P debido a que los tres puntos se localizan sobre el mismo segmento rectilíneo, esto es . . .



$$m_{AB} = m_{AP}$$

$$\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) = \left(\frac{y - y_1}{x - x_1}\right)$$

de modo que resolviendo ésta igualdad se obtiene . . .

$$\boxed{y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)\cdot(x - x_1)} \qquad \text{(I)}$$

Como P es un punto variable que puede recorrer toda una línea recta infinita, la ecuación anterior representa todos los puntos del plano cartesiano que están sobre esa línea recta y se le llama " ***ecuación dos puntos*** "

Otra forma que puede tener la ecuación para una línea recta en el plano cartesiano se obtiene cuando el número $\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$ se substituye por el símbolo m , la pendiente de la recta y se llama " ***ecuación punto-pendiente*** " . . .

$$\boxed{y - y_1 = m\cdot(x - x_1)} \qquad \text{(II)}$$

En ésta última ecuación, notemos que la recta cruzará por el eje Y cuando $x = 0$, en el valor . . .

$$y - y_1 = m\cdot(0 - x_1) \qquad \text{es decir . . .} \qquad y = (y_1 - m\cdot x_1)$$

que frecuentemente se representa por el símbolo b y se llama " ***intercepto al origen*** " .
De tal manera que una tercera representación de la ecuación de una línea recta es . . .

$$y - y_1 = m\cdot(x - x_1)$$

$$y = m\cdot x + (y_1 - m\cdot x_1)$$

$$\boxed{y = m\cdot x + b} \qquad \text{(III)}$$

conocida como " ***ecuación pendiente- intercepto*** " .

<u>*Ejemplo*</u> 2 . Determinar la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos *A:* $(-2,-3)$ y *B:* $(4,1)$, asi como su pendiente e intercepto al origen

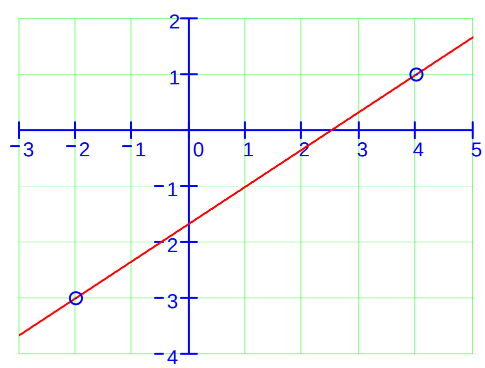
<u>*Solución*</u>: Tomando $(x_1, y_1) = (-2,-3)$ y $(x_2, y_2) = (4,1)$ en la ecuación " dos puntos " para una línea recta $y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)\cdot(x - x_1)$ se obtiene . . .

$$y - (-3) = \left[\frac{1-(-3)}{4-(-2)}\right]\cdot[x - (-2)]$$

$$y + 3 = \left(\frac{4}{6}\right)\cdot(x+2)$$

es decir . . .

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)\cdot x - \frac{5}{3}$$



Asi que por comparación con la ecuación " pendiente-intercepto " : $y = m\cdot x + b$ se ve claramente que la pendiente de ésta recta vale $m = \frac{2}{3}$ y que corta al eje numérico *Y* en $b = \frac{-5}{3}$, como se puede comprobar en su gráfica mostrada.

Al desarrollar la ec. " dos puntos " $(y - y_1)\cdot(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)\cdot(x - x_1)$ se obtiene :

$$(y_2 - y_1)\cdot x - (x_2 - x_1)\cdot y + (y_1\cdot x_2 - y_1\cdot x_1 - y_2\cdot x_1 + y_1\cdot x_1) = 0$$

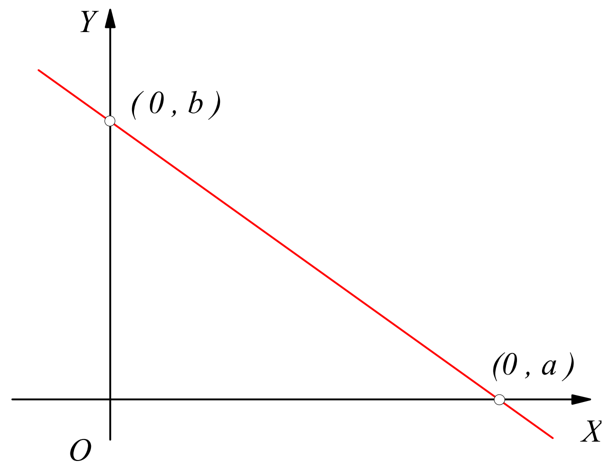
Que simbólicamente se puede representar como . . .

$$\boxed{a\cdot x + b\cdot y + c = 0} \qquad \text{(IV)}$$

donde los coeficientes constantes a , b y c son números reales que resultan de los valores x_1 , x_2 , y_1 y y_2 . Esta forma se llama " ***ecuación normal*** " o también " ***ecuación general*** " .

Por último, si consideramos los interceptos de una línea recta con los ejes de coordenadas.

Sean $(x_1, y_1) = (0, b)$ y $(x_2, y_2) = (a, 0)$ los puntos de intersección de una línea recta con los ejes X e Y respectivamente y apliquemos directamente la ecuación " dos puntos " para una línea recta. . .



$$y - b = \left(\frac{0 - b}{a - 0}\right) \cdot (x - 0)$$

$$y - b = -\left(\frac{b}{a}\right) \cdot x$$

dividiendo ambos miembros por $-b$ resulta . . .

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \qquad \text{(V)}$$

que podemos llamar la " ***ecuación-interceptos*** " .

En resumen, las cinco formas (I) , (II) , (III), (IV) , (V) que puede tener la ecuación que representa a una línea recta son equivalentes, aunque en cada una de ellas los parámetros a , b , c , m etc. representan conceptos diferentes. Es conveniente que memoricemos estas cinco formas para la ecuación de una línea recta.

Por otra parte, si se representa a una variable y por la *ecuación lineal* $a \cdot x + b$, donde x representa un valor sobre el eje numérico real X , entonces los valores numéricos correspondientes sobre el eje real Y están dados por $y = a \cdot x + b$, expresión que corresponde a la ecuación " *pendiente-intercepto* " de una línea recta.
De éste modo, el conjunto de parejas numéricas (x, y) representan puntos del plano cartesiano que están sobre *una línea recta* .

La ecuación $y = a \cdot x + b$ tiene la misma forma que la de la línea recta $y = m \cdot x + b$ y es por eso que se le llama *ecuación lineal de dos variables x e y*.

Por lo tanto, una ecuación lineal equivale a cualquiera de las diferentes formas para la ecuación de una línea recta:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \cdot (x - x_1) \qquad \text{(I)}$$

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \qquad \text{(II)}$$

$$y = a \cdot x + b \qquad \text{(III)}$$

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \qquad \text{(IV)}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \text{(V)}$$

de manera que cualquiera de las ecuaciones son todas ecuaciones lineales.

6.6 Sistemas de ecuaciones lineales .

La solución de la ecuación lineal $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ es el conjunto de valores para la variable x y para la variable y que al substituirse en la ecuación la convienten en una proposición verdadera.

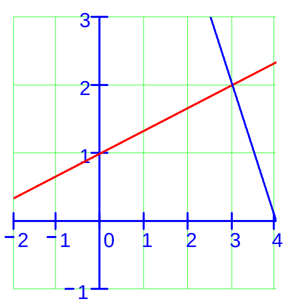
De modo que el número de soluciones de una ecuación lineal es el conjunto de parejas ordenadas (x, y) que satisfacen la ecuación y que representan el número de puntos del plano cartesiano que están sobre la misma línea recta. Dado que el número de puntos de una línea recta es infinito, también lo es el número de soluciones de una ecuación lineal.
En cambio, la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables . . .

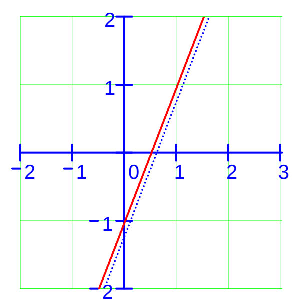
$$a \cdot x + b \cdot y = c$$
$$A \cdot x + B \cdot y = C$$

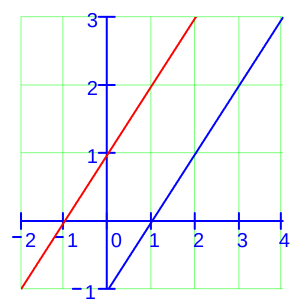
es el conjunto de valores para la variable x y para la variable y que satisfacen *simultáneamente* a ambas ecuaciones.
Puesto que éstas ecuaciones representan líneas rectas en el plano cartesiano, sólo puede haber tres posibles casos de solución . . .

- *cuando las líneas rectas se cortan en un solo punto* (en este caso el número de puntos comunes a las dos líneas es uno y la solución del sistema es ***única*** .)
- *cuando ambas líneas rectas coinciden* (en este caso el número de puntos comunes a las dos líneas es infinito y el número de soluciones del sistema también es ***infinito***).
- *cuando las dos líneas rectas son paralelas* (en este caso el número de puntos comunes a las dos líneas es cero puesto que dos rectas paralelas jamás se cortan según la geometría de Euclides, asi que el sistema de ecuaciones no tiene ***ninguna solución***)

Consideremos los siguientes ejemplos . . .







Sistema : $\begin{pmatrix} y = \frac{1}{3} \cdot x + 1 \\ y = -2 \cdot x + 8 \end{pmatrix}$

Solución: *única* $\begin{pmatrix} x = 3 \\ y = 2 \end{pmatrix}$

Sistema : $\begin{pmatrix} y = 2 \cdot x - 1 \\ 3 \cdot y = 6 \cdot x - 3 \end{pmatrix}$

SNúmero infinito de soluciones

Sistema : $\begin{pmatrix} y = x + 1 \\ y = x - 1 \end{pmatrix}$

Solución : ninguna

estas mismas ideas se pueden generalizar a los sistemas de ecuaciones lineales de tres ó más variables ; pero se puede demostrar que los casos de solución siguen siendo éstos tres.

6.7 Métodos elementales de solución para sistemas de ecuaciones lineales .

Aunque trazar la gráfica de dos ó más ecuaciones lineales resulta ilustrativo, no es un modo preciso para determinar la solución de un sistema de ecuaciones. Es por ello que para determinar la solución analítica y precisa de un un sistema de ecuaciones lineales simultáneas se emplean los siguientes métodos elementales,que se basan en las *propiedades de la igualdad* :

6.7 a) SUMA-RESTA . En éste método se utilizan las propiedades. . .

- *al multiplicar o dividir ambos miembros de una igualdad por el mismo número (distinto de cero) se obtiene una igualdad equivalente.* [Si $a = b$ entonces $a \cdot k = b \cdot k$]
- *al sumar dos igualdades miembro a miembro, se obtiene otra igualdad equivalente* . [Si $a = b$ y $c = d$ entonces $(a + c) = (b + d)$]

Asi que en éste método de solución se multiplican las ecuaciones del sistema por factores apropiados de manera que el coeficiente de alguna de las variables del sistema *sea el mismo* pero positivo en una ecuación y negativo en la otra, de modo que al sumar ambas ecuaciones miembro a miembro los términos que contengan a esa variable se anulen.

Considerando el sistema de ecuaciones lineales :

$$\begin{bmatrix} a\cdot x + b\cdot y = c & . & (\mathrm{I}) \\ A\cdot x + B\cdot y = C & . & (\mathrm{II}) \end{bmatrix}$$

Si la ec. (I) se multiplica por $-A$ y la ecuación (II) se multiplica por a y se suman miembro a miembro ambas ecuaciones resulta . . .

$$\begin{bmatrix} -A\cdot(a\cdot x + b\cdot y) = -A\cdot c & . & (\mathrm{I}) \\ a\cdot(A\cdot x + B\cdot y) = a\cdot C & . & (\mathrm{II}) \\ \hline & . & . \\ 0\cdot x + (a\cdot B - A\cdot b)\cdot y = a\cdot C - A\cdot c & . & (\mathrm{III}) \end{bmatrix}$$

la ecuación $(a\cdot B - A\cdot b)\cdot y = a\cdot C - A\cdot c$ cuya solución para la variable y es $\boxed{y = \dfrac{a\cdot C - A\cdot c}{(a\cdot B - A\cdot b)}}$

Similarmente, si en el sistema inicial la ec. (I) se multiplica por B y la ecuación (II) se multiplica por $-b$ y se suman miembro a miembro ambas ecuaciones se obtiene . . .

$$\begin{bmatrix} B\cdot(a\cdot x + b\cdot y) = B\cdot c & . & (\mathrm{I}) \\ -b\cdot(A\cdot x + B\cdot y) = -b\cdot C & . & (\mathrm{II}) \\ \hline & . & . \\ (a\cdot B - A\cdot b)\cdot x + 0\cdot y = B\cdot c - b\cdot C & . & (\mathrm{III}) \end{bmatrix}$$

la ecuación $(a\cdot B - A\cdot b)\cdot x + 0\cdot y = B\cdot c - b\cdot C$, cuya solución es : $\boxed{x = \dfrac{B\cdot c - b\cdot C}{(a\cdot B - A\cdot b)}}$

6.7 b) IGUALACIÓN . Este método de solución se basa en la propiedad . . .

- *si dos cantidades son iguales a una tercera, entonces son iguales entre si* [Si $\boldsymbol{a = c}$ y $\boldsymbol{b = c}$ entonces $\boldsymbol{a = b}$]

Asi que éste método consiste en despejar la misma variable de dos de las ecuaciones del sistema e igualar las dos expresiones obtenidas.

Considerando el sistema de ecuaciones lineales :

$$\begin{bmatrix} a\cdot\boldsymbol{x} + b\cdot\boldsymbol{y} = c & . & (\mathrm{I}) \\ A\cdot\boldsymbol{x} + B\cdot\boldsymbol{y} = C & . & (\mathrm{II}) \end{bmatrix}$$

despejando la variable $\boldsymbol{y}$ de ambas ecuaciones e igualando ambas expresiones se obtiene . . .

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y} = \dfrac{c - a\cdot\boldsymbol{x}}{b} & . & (\mathrm{I}) \\ \boldsymbol{y} = \dfrac{C - A\cdot\boldsymbol{x}}{B} & . & (\mathrm{II}) \end{bmatrix} \longrightarrow \left(\frac{C - A\cdot\boldsymbol{x}}{B}\right) = \left(\frac{c - a\cdot\boldsymbol{x}}{b}\right)$$

es decir . . . $b\cdot(C - A\cdot\boldsymbol{x}) = B\cdot(c - a\cdot\boldsymbol{x})$

$$(a\cdot B - A\cdot b)\cdot\boldsymbol{x} = B\cdot c - b\cdot C$$

por lo tanto, la solución para la variable $\boldsymbol{x}$ es . . . $\boxed{\boldsymbol{x} = \dfrac{B\cdot c - b\cdot C}{(a\cdot B - A\cdot b)}}$

Por otra parte, si despejamos la variable $\boldsymbol{x}$ del sistema inicial de ecuaciones lineales e igualamos las espresiones obtenidas queda . . .

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} = \dfrac{c - b\cdot\boldsymbol{y}}{a} & . & (\mathrm{I}) \\ \boldsymbol{x} = \dfrac{C - B\cdot\boldsymbol{y}}{A} & . & (\mathrm{II}) \end{bmatrix} \longrightarrow \left(\frac{c - b\cdot\boldsymbol{y}}{a}\right) = \left(\frac{C - B\cdot\boldsymbol{y}}{A}\right)$$

es decir . . . $A\cdot(c - b\cdot\boldsymbol{y}) = a\cdot(C - B\cdot\boldsymbol{y})$

$$(a\cdot B - A\cdot b)\cdot\boldsymbol{y} = a\cdot C - A\cdot c$$

Asi que la solución para la variable $\boldsymbol{y}$ es . . . $\boxed{\boldsymbol{y} = \dfrac{a\cdot C - A\cdot c}{(a\cdot B - A\cdot b)}}$

que son las mismas soluciones generales obtenidas por el método de suma-resta.

6.7 c) SUBSTITUCIÓN . Este método de solución para un sistema de ecuaciones lineales simultáneas se basa en la siguiente propiedad de la igualdad . . .

- *toda cantidad puede ser substituida por su igual* . [Si $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{n}$ entonces $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{n}=\boldsymbol{c}$]

Éste método consiste en despejar una variable de una de las ecuaciones del sistema y substituirla en las demás ecuaciones con el objeto de reducir el número de incógnitas.

Considerando el sistema de ecuaciones lineales :

$$\begin{bmatrix} a\cdot\boldsymbol{x}+b\cdot\boldsymbol{y}=c & . & (\mathrm{I}) \\ A\cdot\boldsymbol{x}+B\cdot\boldsymbol{y}=C & . & (\mathrm{II}) \end{bmatrix}$$

Despejando la variable $\boldsymbol{y}$ de la ecuacón (I) queda $\boldsymbol{y}=\frac{c-a\cdot\boldsymbol{x}}{b}$ y substituyendola en la ecuación (II) se obtiene . . .

$$(\mathrm{II}) \qquad A\cdot\boldsymbol{x}+B\cdot\left(\frac{c-a\cdot\boldsymbol{x}}{b}\right)=C \longrightarrow \left(A-B\cdot\frac{a}{b}\right)\cdot\boldsymbol{x}+B\cdot\frac{c}{b}=C$$

es decir . . .

$$(A\cdot b-a\cdot B)\cdot\boldsymbol{x}=b\cdot C-B\cdot c$$

de modo que la solución para la variable $\boldsymbol{x}$ es . . . $\boxed{\boldsymbol{x}=\frac{B\cdot c-b\cdot C}{(a\cdot B-A\cdot b)}}$

Similarmente, si se despeja la variable $\boldsymbol{x}$ de la ecuacón (I) se obtiene $\boldsymbol{x}=\frac{c-b\cdot\boldsymbol{y}}{a}$ y al substituirla en la ecuación (II) resulta :

$$A\cdot\frac{c-b\cdot\boldsymbol{y}}{a}+B\cdot\boldsymbol{y}=C \longrightarrow \left(-A\cdot\frac{b}{a}+B\right)\cdot\boldsymbol{y}+A\cdot\frac{c}{a}=C \qquad (\mathrm{II})$$

es decir . . .

$$(a\cdot B-A\cdot b)\cdot\boldsymbol{y}=a\cdot C-A\cdot c$$

y la solución para la variable $\boldsymbol{y}$ es . . . $\boxed{\boldsymbol{y}=\frac{a\cdot C-A\cdot c}{(a\cdot B-A\cdot b)}}$

Vemos asi que con cualquiera de éstos tres métodos de solución se obtiene la misma solución general para un sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos variables.

Para un sistema de ecuaciones simultáneas de más de dos variables se pueden emplear éstos mismos métodos de solución para transformar el sistema inicial en un otro sistema equivalente más simple (de menos variables) .

El objetivo es reducir el número de incógnitas en cada aplicación.

Ejemplo 1. Resolver por el método de *suma-resta* el sistema de ecuaciones lineales simultáneas :

$$\begin{bmatrix} 2\cdot x + 9\cdot y = 8 & . & (\mathrm{I}) \\ 3\cdot x + 10\cdot y = 5 & . & (\mathrm{II}) \end{bmatrix}$$

Solución : Multiplicando la ecuación (I) por 3 , la ecuación (II) por -2, (*que son los coeficientes de la variable* x) y sumando los resultados . . .

$$\begin{bmatrix} 3\cdot(2\cdot x + 9\cdot y) = 3\cdot(8) & . & (\mathrm{I}) \\ (-2)\cdot(3\cdot x + 10\cdot y) = (-2)\cdot 5 & . & (\mathrm{II}) \\ \hline & . & . \\ 0\cdot x + (27-20)\cdot y = (24-10) & . & (\mathrm{III}) \end{bmatrix}$$

se obtiene la ecuación $0\cdot x + 7\cdot y = 14$ de donde resulta el valor $y = \frac{14}{7} = 2$

Similarmente, multiplicando la ecuación (I) por 10 y la ecuación (II) por -9 (*que son los coeficientes de la variable* y) y sumando los resultados . . .

$$\begin{bmatrix} 10\cdot(2\cdot x + 9\cdot y) = 10\cdot(8) & . & (\mathrm{I}) \\ (-9)\cdot(3\cdot x + 10\cdot y) = (-9)\cdot 5 & . & (\mathrm{II}) \\ \hline & . & . \\ (20-27)\cdot x + 0\cdot y = (80-45) & . & (\mathrm{III}) \end{bmatrix}$$

se obtiene la ecuación $-7\cdot x + 0\cdot y = 35$ de donde resulta el valor $x = \frac{35}{-7} = -5$

Comprobación : $\begin{bmatrix} 2\cdot(-5) + 9\cdot(2) = -10 + 18 & .= 8 & (\mathrm{I}) \\ 3\cdot(-5) + 10\cdot(2) = -15 + 20 & .= 5 & (\mathrm{II}) \end{bmatrix}$ en efecto, el sistema se satisface.

Ejemplo 2. Resolver por el método de *igualación* el sistema de ecuaciones lineales simultáneas :

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}\cdot x + \frac{3}{4}\cdot y = \frac{5}{6} & . & (\mathrm{I}) \\ 6\cdot x - 3\cdot y = 1 & . & (\mathrm{II}) \end{bmatrix}$$

Solución : Resolvamos las ecuaciones para la variable y e igualemos los resultados . . .

$$\begin{bmatrix} y = \frac{10 - 8\cdot x}{9} & . & (\mathrm{I}) \\ y = 2\cdot x - \frac{1}{3} & . & (\mathrm{II}) \end{bmatrix} \longrightarrow \left(2\cdot x - \frac{1}{3}\right) = \frac{10 - 8\cdot x}{9} \qquad (\mathrm{II})$$

es decir . . . $$9\cdot\left(2\cdot x-\frac{1}{3}\right)=10-8\cdot x$$

$$(18+8)\cdot x=10+3$$

$$x=\frac{13}{26}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

Similarmente, resolviendo las ecuaciones (I) y (II) para la variable x e igualemos los resultados . . .

$$\begin{bmatrix} x=\dfrac{10-9\cdot y}{8} & . & (\mathrm{I}) \\ x=\dfrac{3\cdot y+1}{6} & . & (\mathrm{II}) \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{3\cdot y+1}{6}=\frac{10-9\cdot y}{8} \qquad (\mathrm{II})$$

es decir . . . $$24\cdot\left(\frac{3\cdot y+1}{6}\right)=24\cdot\left(\frac{10-9\cdot y}{8}\right)$$, esto es $$12\cdot y+4=30-27\cdot y$$

$$(12+27)\cdot y=30-4$$

$$y=\frac{26}{39}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

<u>*Comprobación*</u> : Substituyendo los valores encontrados para las variables x e y en el sistema inicial resulta:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6} & . & (\mathrm{I}) \\ 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)=(3-2)=1 & . & (\mathrm{II}) \end{bmatrix}$$ y en efecto, el sistema se satisface.

<u>*Ejemplo*</u> 3. Resolver por el método de <u>*substitución*</u> el sistema de ecuaciones lineales simultáneas :

$$\begin{bmatrix} 6\cdot x+8\cdot y=10 & . & (\mathrm{I}) \\ 9\cdot x-4\cdot y=3 & . & (\mathrm{II}) \end{bmatrix}$$

<u>*Solución*</u> : Resolviendo la ecuación (I) para la variable y queda : $y=\dfrac{10-6\cdot x}{8}$, asi que al substituirla en la ecuación (II) se obtiene . . .

(II) $$9\cdot x-4\cdot\left(\frac{10-6\cdot x}{8}\right)=3 \longrightarrow 9\cdot x-5+3\cdot x=3$$ es decir $$12\cdot x=3+5$$

ecuación lineal que dá la solución : $x = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Resolviendo ahora la ecuación (I) para la variable x queda : $x = \frac{10-8\cdot y}{6}$, asi que al substituirla en la ecuación (II) resulta :

$$9\cdot\left(\frac{10-8\cdot y}{6}\right) - 4\cdot y = 3 \longrightarrow 15 - 12\cdot y - 4\cdot y = 3 \quad \text{(II)}$$

esto es . . . $-16\cdot y = 3 - 15$, asi que $y = \frac{-12}{-16} = \frac{3}{4}$

Comprobación : Substituyendo los valores encontrados para las variables x e y en el sistema inicial resulta:

$$\begin{bmatrix} 6\cdot\left(\frac{2}{3}\right) + 8\cdot\left(\frac{3}{4}\right) = (4+6) = 10 & . & \text{(I)} \\ 9\cdot\left(\frac{2}{3}\right) - 4\cdot\left(\frac{3}{4}\right) = (6-3) = 3 & . & \text{(II)} \end{bmatrix}$$ y en efecto, el sistema se satisface.

Ejemplo 4. Resolver por el método de *suma-resta* el sistema de ecuaciones lineales :

$$\begin{bmatrix} -2\cdot x + 3\cdot y - 4\cdot z = 14 & . & \text{(I)} \\ 6\cdot x + y + 2\cdot z = 8 & . & \text{(II)} \\ 5\cdot x - y + 3\cdot z = \frac{-3}{2} & . & \text{(III)} \end{bmatrix}$$

Solución : Hagamos las siguientes operaciones:

a) $\boxed{3\cdot\text{(I)} + \text{(II)}}$

Multiplicación de la ecuación (I) por 3 y su suma con la ecuación (II) (*para que los coeficientes de la variable* x *se cancelen al sumarse esas ecuaciones*)

$$\begin{bmatrix} 3\cdot(-2\cdot x + 3\cdot y - 4\cdot z) = 3\cdot(14) & . & \text{(I)} \\ 6\cdot x + y + 2\cdot z = 8 & . & \text{(II)} \\ \hline & . & . \\ 0\cdot x + 10\cdot y - 10\cdot z = 3\cdot(14) + 8 & . & \text{(IV)} \end{bmatrix}$$

y resulta asi la ecuación equivalente : $10\cdot y - 10\cdot z = 50$, es decir $y - z = 5$ (IV)

b) $\boxed{5\cdot(\mathrm{I})+2\cdot(\mathrm{III})}$

Multiplicación de la ecuación (I) por 5 y suma con el producto de 2 por la ecuación (III)

(*para que los coeficientes de la variable* x *se cancelen al sumarse esas ecuaciones*)

$$\left[\begin{array}{rcl} 5\cdot(-2\cdot x+3\cdot y-4\cdot z) = 5\cdot(14) & . & (\mathrm{I}) \\ 2\cdot(5\cdot x-y+3\cdot z) = 2\cdot\left(\dfrac{-3}{2}\right) & . & (\mathrm{II}) \\ \hline 0\cdot x+13\cdot y-14\cdot z = 5\cdot(14)-3 & . & (\mathrm{V}) \end{array}\right]$$

y resulta asi la ecuación equivalente : $13\cdot y-14\cdot z = 67$ (V).

De éste modo, el sistema inicial se ha transformado al sistema equivalente más simple :

$$\left[\begin{array}{rcl} y-z = 5 & . & (\mathrm{IV}) \\ 13\cdot y-14\cdot z = 67 & . & (\mathrm{V}) \end{array}\right]$$

Resolviendo ahora éste sistema, por ejemplo mediante la operación : $\boxed{-13\cdot(\mathrm{IV})+(\mathrm{V})}$ resulta. . .

$$\left[\begin{array}{rcl} -13\cdot(y-z) = -13\cdot(5) & . & (\mathrm{IV}) \\ 13\cdot y-14\cdot z = 67 & . & (\mathrm{V}) \\ \hline 0\cdot y+(13-14)\cdot z = -65+67 & . & (\mathrm{VI}) \end{array}\right]$$

es decir . . . $-z = 2$ ó bién $z = -2$

Repitiendo este procedimiento, se pueden determinar los valores de las otras variables x e y ; sin embargo, una vez conocido el valor de una variable, resulta más simple substituir "hacia atrás" , es decir escribir el valor de ésta variable en la secuaciones anteriores y simplificar. Asi , en éste problema substituimos el valor de la variable z en cualquiera de las ecuaciones (IV) ó (V) para obtener el valor de la variable y , substituyendo por ejemplo en la ec. (IV) queda :

$$(\mathrm{IV}) \qquad y-(-2) = 5 \longrightarrow y = 3$$

y substituyendo ahora los valores encontrados $z = -2$, $y = 3$ en cualquiera de las ecuaciones (I) , (II) ó (III) , (por ejemplo en la ec. (II)) resulta . . .

$$(\mathrm{II}) \qquad 6\cdot x+(3)+2\cdot(-2) = 8$$

$$6\cdot x-1 = 8 \longrightarrow x = \frac{3}{2}$$

<u>*Comprobación*</u>:

Substituyendo los valores encontrados para las variables x , y , z en el sistema inicial resulta:

$$\begin{bmatrix} -2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)+3\cdot(3)-4\cdot(-2) = (-3+9+8) = 14 & . & (\mathrm{I}) \\ 6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)+(3)+2\cdot(-2) = (9+3-4) = 8 & . & (\mathrm{II}) \\ 5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)-(3)+3\cdot(-2) = \left(\frac{15}{2}-3-6\right) = \frac{-3}{2} & . & (\mathrm{III}) \end{bmatrix}$$

y en efecto, el sistema se satisface.

<u>*Ejemplo*</u> 5. Resolver por el método de <u>***igualación***</u> el sistema de ecuaciones lineales :

$$\begin{bmatrix} 5\cdot x-3\cdot y+2\cdot z = 2 & . & (\mathrm{I}) \\ 15\cdot x+3\cdot y-6\cdot z = -8 & . & (\mathrm{II}) \\ \frac{5}{2}\cdot x-4\cdot y-3\cdot z = \frac{2}{3} & . & (\mathrm{III}) \end{bmatrix}$$

<u>*Solución*</u> : Resolvamos las tres ecuaciones para la variable z . . .

$$\begin{bmatrix} z = \left(\frac{-5}{2}\cdot x+\frac{3}{2}\cdot y+1\right) & . & (\mathrm{I}) \\ z = \left(\frac{5}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot y+\frac{4}{3}\right) & . & (\mathrm{II}) \\ z = \left(\frac{5}{6}\cdot x-\frac{4}{3}\cdot y-\frac{2}{9}\right) & . & (\mathrm{III}) \end{bmatrix}$$

la igualación de (I) y (II) genera la ecuación equivalente : $\frac{-5}{2}\cdot x+\frac{3}{2}\cdot y+1 = \frac{5}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot y+\frac{4}{3}$

que simplificada es . . .

$$-5\cdot x+y = \frac{1}{3} \qquad (\mathrm{IV})$$

mientras que igualando (I) y (III) se genera la ecuación : $\frac{-5}{2}\cdot x+\frac{3}{2}\cdot y+1 = \frac{5}{6}\cdot x-\frac{4}{3}\cdot y-\frac{2}{9}$

que simplificada es . . .

$$\frac{-10}{3}\cdot x+\frac{17}{6}\cdot y = \frac{-11}{9} \qquad (\mathrm{V})$$

Resolviendo ahora las ecuaciones (IV) y (V) para la variable y e igualándolas resulta . . .

$$\left(5\cdot x+\frac{1}{3}\right) = \frac{20}{17}\cdot x-\frac{22}{51}$$

esto es . . .

$$\left(5-\frac{20}{17}\right)\cdot x=\left(\frac{-22}{51}-\frac{1}{3}\right) \longrightarrow \frac{65}{17}\cdot x=\frac{-13}{17}$$ que resulta en $\boxed{x=\frac{-1}{5}}$

La substitución "hacia atrás" en las ecuaciones (IV) ó (V) genera el valor de la variable y :

(IV) $$y=5\cdot x+\frac{1}{3} \longrightarrow y=5\cdot\left(\frac{-1}{5}\right)+\frac{1}{3}$$ que resulta en $\boxed{y=\frac{-2}{3}}$

La substitución en cualquiera de las ecuaciones (I) , (I) ó (III) genera el valor de la variable z :

(I) $$z=\left(\frac{-5}{2}\cdot x+\frac{3}{2}\cdot y+1\right) \longrightarrow z=\frac{-5}{2}\cdot\left(\frac{-1}{5}\right)+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)+1=\boxed{\frac{1}{2}}$$

<u>Comprobación</u>:
Substituyendo los valores encontrados para las variables x , y , z en el sistema inicial resulta:

$$\begin{bmatrix} 5\cdot\left(\frac{-1}{5}\right)-3\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=(-1+2+1)=2 & . & (\mathrm{I}) \\ 15\cdot\left(\frac{-1}{5}\right)+3\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=(-3-2-3)=-8 & . & (\mathrm{II}) \\ \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{-1}{5}\right)-4\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{-1}{2}+\frac{8}{3}-\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3} & . & (\mathrm{III}) \end{bmatrix}$$

y en efecto, el sistema se satisface.

<u>Ejemplo</u> 6. Resolver por el método de ***<u>substitución</u>*** el sistema de ecuaciones lineales :

$$\begin{bmatrix} 4\cdot x-2\cdot y+2\cdot z=-8 & . & (\mathrm{I}) \\ 5\cdot x+3\cdot y-4\cdot z=8 & . & (\mathrm{II}) \\ 3\cdot x-y+2\cdot z=-12 & . & (\mathrm{III}) \end{bmatrix}$$

<u>Solución</u> : Resolviendo para z la ecuación (I) $z=-2\cdot x+y-4$ y substituyéndola en las otras ecuaciones resulta el sistema equivalente. . .

$$\begin{bmatrix} 5\cdot x+3\cdot y-4\cdot(-2\cdot x+y-4)=8 & . & (\mathrm{IV}) \\ 3\cdot x-y+2\cdot(-2\cdot x+y-4)=-12 & . & (\mathrm{V}) \end{bmatrix}$$

es decir . . .

$$\begin{bmatrix} 13\cdot x-y=-8 & . & (\mathrm{IV}) \\ -x+y=-4 & . & (\mathrm{V}) \end{bmatrix}$$

Notemos ahora que si se suman miembro a miembro las ecuciones (IV) y (V) , se puede eliminar la variable y quedando la ecuación . . .

$$(13\cdot x - x) = (-8) + (-4)$$

$$12\cdot x = -12$$

$$x = -1$$

Substituyendo éste valor para x en (IV) ó en (V) queda . . .

$$(\mathrm{V}) \qquad -(-1) + y = -4 \quad \longrightarrow \quad y = -5$$

Substituyendo los valores para x e y en (I) , en (II) ó en (III) queda . . .

$$(\mathrm{III}) \qquad 3\cdot(-1) - (-5) + 2\cdot z = -12 \quad \longrightarrow \quad 2\cdot z = -12 + 3 - 5 \quad \longrightarrow \quad z = -7$$

<u>*Comprobación*</u>:
Substituyendo los valores encontrados para las variables x , y , z en el sistema inicial resulta:

$$\left[\begin{array}{lcl} 4\cdot(-1) - 2\cdot(-5) + 2\cdot(-7) = (-4 + 10 - 14) = -8 & . & (\mathrm{I}) \\ 5\cdot(-1) + 3\cdot(-5) - 4\cdot(-7) = (-5 - 15 + 28) = 8 & . & (\mathrm{II}) \\ 3\cdot(-1) - (-5) + 2\cdot(-7) = (-3 + 5 - 14) = -12 & . & (\mathrm{III}) \end{array}\right]$$

y en efecto, el sistema se satisface.

Notemos que, como se ilustra en éste último ejemplo, se pueden combinar los métodos elementales de solución para un sistema de ecuaciones lineales, .

Como se ha ilustrados en los ejemplos anteriores, al resolver un sistema de ecuaciones lineales, una vez determinado el valor de una de las variables ó incógnitas del sistema, por cualquiera de los tres métodos elementales, la subtitución "hacia atrás" resulta un procedimiento muy simple que nos puede ayudar a determinar el valor de las otras incógnitas sin ser necesaria la aplicación repetida de un método particular de solución.

Por otra parte, a medida que el sistema de ecuaciones aumenta de "tamaño", al crecer el número de ecuaciones y de incógnitas, los métodos elementales se van tornando cada vez más laboriosos y complicados y la probabilidad de cometer un error de cálculo en alguno de los pasos intermedios del proceso, aumenta también de manera proporcional.

Es por esa razón que se han desarrollado métodos generales de solución de sistemas de ecuaciones lineales que son más sistemáticos (*método de <u>Gauss</u>* , *método de <u>Gauss-Jordan</u>, método de la <u>Matriz inversa</u>, método de <u>Cofactores</u> de determinantes* , etc.) y que se analizarán en su momento en un curso de Álgebra Superior.

6.7 d) DETERMINANTES . Este método de solución para un sistema de ecuaciones lineales simultáneas no se basa en las propiedades de la igualdad ; sino más bién en observar que en un sistema de ecuaciones como . . .

$$\begin{bmatrix} a\cdot \boldsymbol{x} + b\cdot \boldsymbol{y} = c & . & (\mathrm{I}) \\ A\cdot \boldsymbol{x} + B\cdot \boldsymbol{y} = C & . & (\mathrm{II}) \end{bmatrix} \qquad (*)$$

cuya solución general es :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} = \dfrac{B\cdot c - b\cdot C}{(a\cdot B - A\cdot b)} \\ \boldsymbol{y} = \dfrac{a\cdot C - A\cdot c}{(a\cdot B - A\cdot b)} \end{bmatrix} \qquad (**)$$

los coeficientes a , A , b y B de las variables $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ aparecen en una combinación *simétrica* , lo cual suguiere *definir un arreglo rectangular de números* como el que se ilustra en la figura de la derecha llamado ***determinante*** de orden 2 x 2.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \qquad - bA \qquad aB$$

El *valor* de éste determinante se calcula multiplicando los números en cada diagonal del arreglo, siendo el producto positivo si la diagonal es "descendente" y negativo si la diagonal es "ascendente" .

De ésta definición, se deduce fácilmente que los numeradores en las expresiones para $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ del sistema (**) , pueden ser escritos también como determinantes, de modo que la solución general del sistema de ecuaciones de dos variables se puede representar como . . .

$$\boldsymbol{x} = \frac{\left|\begin{pmatrix} c & b \\ C & B \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} a & b \\ A & B \end{pmatrix}\right|} = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad ; \qquad \boldsymbol{y} = \frac{\left|\begin{pmatrix} a & c \\ A & C \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} a & b \\ A & B \end{pmatrix}\right|} = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

donde el determinante en cada numerador se obtiene del determinante del denominador reemplazando la columna de los coeficientes de la variable $\boldsymbol{x}$ o $\boldsymbol{y}$ por los términos constantes respectivos c y C del sistema de ecuaciones.

Este esquema de cálculo se puede extender para calcular determinantes de orden 3 x 3 mediante el recurso mnemotécnico mostrado en la figura de la derecha.
En éste esquema, se han duplicado las dos primeras columnas del arreglo rectangular y se han colocado a la derecha de él , con el fn de formar diagonales que incluyan 3 factores.
Nuevamente, las diagonales inclinadas hacia la derecha representan productos negativos y las diagonales inclinadas hacia la izauierda representan los productos positivos. Asi que el determinante tiene el valor . . .

$$\begin{array}{cccccc} & & & - & - & - \\ \Delta = & \left| \begin{matrix} a & b & c \\ A & B & C \\ D & E & F \end{matrix} \right| & \begin{matrix} a & b \\ A & B \\ D & E \end{matrix} & & & \\ & & & + & + & + \end{array}$$

$$\Delta = (a\cdot B\cdot F + b\cdot C\cdot D + c\cdot A\cdot E) - c\cdot B\cdot D - a\cdot C\cdot E - b\cdot A\cdot F$$

Usando los métodos analíticos de suma resta, substitución o igualación, es posible demostrar que la solución general de un sistema de tres ecuaciones lineales simultáneas con tres variables. . .

$$\begin{pmatrix} a\cdot \boldsymbol{x} + b\cdot \boldsymbol{y} + c\cdot \boldsymbol{z} = k_1 \\ A\cdot \boldsymbol{x} + B\cdot \boldsymbol{y} + C\cdot \boldsymbol{z} = k_2 \\ D\cdot \boldsymbol{x} + E\cdot \boldsymbol{y} + F\cdot \boldsymbol{z} = k_3 \end{pmatrix}$$

se puede escribir en términos de los determinantes como :

$$\boldsymbol{x} = \frac{\left|\begin{pmatrix} \boldsymbol{k_1} & b & c \\ \boldsymbol{k_2} & B & C \\ \boldsymbol{k_3} & E & F \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} a & b & c \\ A & B & C \\ D & E & F \end{pmatrix}\right|} \quad ; \quad \boldsymbol{y} = \frac{\left|\begin{pmatrix} a & \boldsymbol{k_1} & c \\ A & \boldsymbol{k_2} & C \\ D & \boldsymbol{k_3} & F \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} a & b & c \\ A & B & C \\ D & E & F \end{pmatrix}\right|} \quad ; \quad \boldsymbol{z} = \frac{\left|\begin{pmatrix} a & b & \boldsymbol{k_1} \\ A & B & \boldsymbol{k_2} \\ D & E & \boldsymbol{k_3} \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} a & b & c \\ A & B & C \\ D & E & F \end{pmatrix}\right|}$$

o bién . . .

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \frac{\Delta_x}{\Delta}} \quad ; \quad \boxed{\boldsymbol{y} = \frac{\Delta_y}{\Delta}} \quad ; \quad \boxed{\boldsymbol{x} = \frac{\Delta_z}{\Delta}}$$

donde Δ_x , Δ_y y Δ_z son determinantes que se obtienen del determinante Δ al substituir la columna de coeficientes de la variable $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ o $\boldsymbol{z}$ por los términos constantes k_1 , k_2 y k_3 de las ecuaciones respectivas.

Es importante reconocer que éste esquema simplificado para el cálculo de determinantes vale sólamente en los casos 2 x 2 y 3 x 3 . *Para calcular un determinante de mayor tamaño* es necesario desarrollar las propiedades algebráicas de estos nuevos elementos matemáticos, lo cual se hará en un curso de Álgebra Superior.

Ejemplo 4. Resolver por el método de *determinantes* el sistema de ecuaciones lineales simultáneas :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{3\cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}}{7} - \dfrac{3\cdot \boldsymbol{x} - 5\cdot \boldsymbol{y}}{2} = 10 & . & \text{(I)} \\ \dfrac{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}}{2} + \dfrac{7\cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}}{4} = 8 & . & \text{(II)} \end{bmatrix}$$

Solución : Para poder usar el método de determinantes, es necesario que el sistema de ecuaciones esté escrito en la forma normal:

$$\begin{bmatrix} a\cdot \boldsymbol{x} + b\cdot \boldsymbol{y} = c & . & \text{(I)} \\ A\cdot \boldsymbol{x} + B\cdot \boldsymbol{y} = C & . & \text{(II)} \end{bmatrix}$$

con el fin de identificar el valor cada uno de los coeficientes de las variables y los términos constantes.

Transformando entonces el sistema inicial en otro sistema equivalente (usando las propiedades de la igualdad) resulta . . .

$$\left[\begin{array}{c} 14\cdot\left(\dfrac{3\cdot x+y}{7}-\dfrac{3\cdot x-5\cdot y}{2}\right)=14\cdot(10) \\ 4\cdot\left(\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{7\cdot x-y}{4}\right)=4\cdot(8)\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c} 2\cdot(3\cdot x+y)-7\cdot(3\cdot x-5\cdot y)=140 \\ 2\cdot(x+y)+(7\cdot x-y)=32\end{array}\right]$$

y se obtiene el sistema equivalente . . .

$$\left[\begin{array}{ll} -15\cdot x+37\cdot y=140 & .\quad (\mathrm{I}) \\ 9\cdot x+y=32 & .\quad (\mathrm{II})\end{array}\right]$$

de modo que el determinante del sistema es . . . $\left|\begin{pmatrix}-15 & 37\\ 9 & 1\end{pmatrix}\right| = -348$ y la solución es . . .

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\left|\begin{pmatrix}140 & 37\\ 32 & 1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-15 & 37\\ 9 & 1\end{pmatrix}\right|}=\frac{(140)\cdot(1)-(32)\cdot(37)}{(-15)\cdot(1)-(9)\cdot(37)}=\frac{-1044}{-348}=3$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\left|\begin{pmatrix}-15 & 140\\ 9 & 32\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-15 & 37\\ 9 & 1\end{pmatrix}\right|}=\frac{(-15)\cdot(32)-(9)\cdot(140)}{(-15)\cdot(1)-(9)\cdot(37)}=\frac{-1740}{-348}=5$$

<u>*Comprobación*</u> : Substituyendo los valores encontrados para las variables x e y en el sistema inicial resulta:

$$\left[\begin{array}{ll} \dfrac{3\cdot(3)+(5)}{7}-\dfrac{3\cdot(3)-5\cdot(5)}{2}=\dfrac{14}{7}+\dfrac{16}{2}=(2+8)=10 & ..\quad (\mathrm{I}) \\ \dfrac{(3)+(5)}{2}+\dfrac{7\cdot(3)-(5)}{4}=\dfrac{8}{2}+\dfrac{16}{4}=(4+4)=8 & ..\quad (\mathrm{II})\end{array}\right]$$

y en efecto el sistema se satisface.

Los determinantes tienen además otras propiedades matemáticas que aquí no es posible describir en detalle. Baste decir por ahora que la principal ventaja de resolver un sistema de ecuaciones por medio de determinantes es que permite calcular el valor de cualquiera de las variables o incógnitas independientemente de las demás variables, es decir no es necesario conocer el valor de las demás variables para obtener el valor de cada una de ellas, lo cual no es posible cuando se utilizan los otros métodos de solución.

<u>*EJERCICIO*</u> 19 . (*Sistemas de ecuaciones lineales*)

I. Resuleva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de *suma o resta*.

1. $\begin{pmatrix} x+3\cdot y=11 \\ 3\cdot x+y=9 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3\cdot x-3\cdot y=3 \\ x+2\cdot y=-5 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3\cdot x-2\cdot y=-1 \\ 2\cdot x+y=4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 5\cdot x+3\cdot y=-2 \\ 3\cdot x+2\cdot y=1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 3\cdot x+2\cdot y=4 \\ 4\cdot x-5\cdot y=13 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 4\cdot x-5\cdot y=-1 \\ 3\cdot x+4\cdot y=4 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 15\cdot x-12\cdot y=3 \\ 4\cdot x+y=-16 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 4\cdot x+9\cdot y=-15 \\ 7\cdot x-5\cdot y=119 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 6\cdot x+5\cdot y=0 \\ -4\cdot x-3\cdot y=2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 4\cdot x+10\cdot y=-1 \\ 5\cdot x+8\cdot y=-8 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} -8\cdot x+5\cdot y=-58 \\ 13\cdot x-12\cdot y=9 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 6\cdot x+5\cdot y=\frac{-1}{2} \\ -4\cdot x-3\cdot y=\frac{-7}{2} \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 2\cdot x+3\cdot y-z=11 \\ 4\cdot x+6\cdot y+z=13 \\ 3\cdot x-y+2\cdot z=-5 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} -x-2\cdot y+3\cdot z=7 \\ 2\cdot x+4\cdot y+z=0 \\ 3\cdot x-y-2\cdot z=14 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 5\cdot x-2\cdot y+3\cdot z=-1 \\ 10\cdot x+y+8\cdot z=16 \\ x-y-2\cdot z=0 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 2\cdot x+3\cdot y=9 \\ 4\cdot x-2\cdot z=-2 \\ 3\cdot y+3\cdot z=4 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 3\cdot x-2\cdot y-4\cdot z=3 \\ 6\cdot x-2\cdot z=20 \\ 2\cdot y+6\cdot z=4 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} -4\cdot x+3\cdot y+2\cdot z=\frac{3}{2} \\ 5\cdot x+6\cdot y-2\cdot z=-8 \\ 2\cdot x-12\cdot y+4\cdot z=10 \end{pmatrix}$

II. Resuleva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por los métodos de *igualación o de substitución*.

19. $\begin{pmatrix} 5\cdot x-7\cdot y=13 \\ 3\cdot x+5\cdot y=-3 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 3\cdot x-y=1 \\ 4\cdot x+5\cdot y=-2 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 7\cdot x-3\cdot y=-2 \\ 5\cdot x+y=-1 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} \frac{5}{3}\cdot x+\frac{3}{2}\cdot y=-2 \\ \frac{3}{4}\cdot x-\frac{2}{3}\cdot y=1 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} \frac{3}{4}\cdot x+\frac{2}{3}\cdot y=-5 \\ \frac{4}{3}\cdot x-\frac{5}{4}\cdot y=3 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 4\cdot x-\frac{5}{3}\cdot y=-35 \\ \frac{3}{5}\cdot x-2\cdot y=21 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} \frac{5\cdot x-2\cdot y}{4}-\frac{3\cdot x+y}{3}=82 \\ \frac{4\cdot x+y}{3}+\frac{2\cdot x-3\cdot y}{4}=123 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} \frac{3\cdot x-4\cdot y}{3}-\frac{2\cdot x-3\cdot y}{5}=\frac{7}{15} \\ \frac{2\cdot x-y}{2}+\frac{x+5\cdot y}{3}=\frac{23}{6} \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} \frac{2\cdot x+3\cdot y}{4}-\frac{x-y}{7}=\frac{5}{7} \\ \frac{x+y}{4}+\frac{4\cdot x+5\cdot y}{2}=\frac{-5}{4} \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} \frac{4\cdot x+2\cdot y-1}{3\cdot x-y+2}=1 \\ \frac{-4\cdot x+5\cdot y-2}{5\cdot x+2\cdot y+1}=-2 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} \frac{8\cdot x+5\cdot y-5}{2\cdot x-3\cdot y+3}=\frac{3}{5} \\ \frac{13\cdot x+12\cdot y-6}{5\cdot x+2\cdot y-4}=1 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} \frac{6\cdot x+5\cdot y-5}{-4\cdot x-3\cdot y+4}=-2 \\ \frac{10\cdot x+y-3}{3\cdot x-y-6}=-2 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} \frac{2\cdot x+y}{4}-\frac{x-y}{2}=\frac{x+y}{2}+\frac{x-3\cdot y}{3}+25 \\ \frac{x-2\cdot y}{4}+\frac{3\cdot x+3\cdot y}{5}=\frac{x+2\cdot y}{4}+\frac{2\cdot x-3\cdot y}{3} \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} \frac{2\cdot x+y}{4}-\frac{x-y}{2}=\frac{x-3\cdot y}{3}+\frac{5}{2} \\ \frac{x+3\cdot y}{2}-\frac{3\cdot x+6\cdot y}{4}=\frac{x-3\cdot y}{4} \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} x+3\cdot y-z=10 \\ 4\cdot x-6\cdot y+z=-1 \\ 3\cdot x-5\cdot y+2\cdot z=-3 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} -x-2\cdot y+3\cdot z=-2 \\ 2\cdot x+4\cdot y-3\cdot z=7 \\ 3\cdot x-y-5\cdot z=10 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} \frac{5}{3}\cdot x-\frac{2}{5}\cdot y+\frac{7}{2}\cdot z=\frac{2}{5} \\ \frac{3}{4}\cdot x+\frac{1}{3}\cdot y+\frac{1}{2}\cdot z=\frac{1}{12} \\ \frac{2}{5}\cdot x+\frac{3}{2}\cdot y-\frac{1}{3}\cdot z=\frac{8}{15} \end{pmatrix}$

EJERCICIO 19 . *Respuestas* (*problemas impares*)

1. $x=2, y=3$
3. $x=1, y=2$
5. $x=2, y=-1$
7. $x=-3, y=-4$
9. $x=-5, y=6$
11. $x=21, y=22$
13. $x=1, y=2, z=-3$
15. $x=2, y=4, z=-1$
17. $x=3, y=5, z=-1$
19. $x=\frac{22}{23}, y=\frac{-27}{23}$
21. $x=\frac{-5}{22}, y=\frac{3}{22}$
23. $x=\frac{-612}{263}, y=\frac{-1284}{263}$
25. $x=82, y=123$
27. $x=-3, y=2$
29. $x=4, y=-3$
31. $x=-36, y=-4$
33. $x=3, y=2, z=-1$
35. $x=-3, y=4, z=2$

6.8 <u>Problemas de aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales</u>.
Un problema de aplicación normalmente está expresado en las palabras de un lenguaje cotidiano como el español, y aunque en principio es posible determinar la solución del problema en ese mismo lenguaje haciendo razonamientos lógicos, generalmente es más sencillo. . .

1. hacer una traducción del enunciado del problema al lenguaje algebráico.
2. resolver el problema en éste campo.
3. finalmente expresar la solución de nuevo en el lenguaje cotidiano.

La traducción del español al álgebra no es una habilidad que se pueda adquirir fácilmente, sin embargo, como ya se advirtió en otra sección de éste capítulo, existen palabras ó frases típicas que indican una operación algebráica, o una relación entre las cantidades que intervienen en el problema.

En el enunciado de un problema de aplicación pueden aparecer dos o más cantidades cuyo valor no se conoce (incógnitas), y cuando la traducción al lenguaje algebráico genera ecuaciones lineales, es posible determinar la solución del problema por medio de los métodos elementales explicados anteriormente.

Ilustremos con algunos ejemplos:

<u>*Ejemplo*</u> 1. ***El cociente de dos números es 7 y su diferencia es 72 . ¿Cuáles son esos números ?***

<u>*Solución*</u>: Dado que se involucran dos cantidades desconocidas, representémoslas por los símbolos x e y
Entonces, de acuerdo al enunciado del problema se tiene . . .

"el cociente de dos números es 7. . . ." se traduce en la ecuación . . . $\frac{x}{y} = 7$

"su diferencia es 72 " se traduce en la ecuación . . . $x - y = 72$

De éste modo, se tiene el sistema de ecuaciones simultáneas de dos variables:

$$\begin{bmatrix} x - 7\cdot y = 0 & \text{(I)} \\ x - y = 72 & \text{(II)} \end{bmatrix}$$

cuya solución por cualquiera de los métodos explicados anteriormente es : $\begin{pmatrix} x = 84 \\ y = 12 \end{pmatrix}$

<u>*Ejemplo*</u> 2. ***¿Cuál es el la fracción que se iguala a un quinto o a un sexto según se añada 1 al numerador o al denominador ?***

<u>*Solución*</u>: Se involucran dos cantidades desconocidas, el numerador y el denominador de una fracción. Representémoslas por los símbolos x e y . Entonces, de acuerdo al enunciado del problema . . .

"la fracción es igual a $\frac{1}{5}$ si se añade 1 al numerador " se traduce en . . . $\frac{x+1}{y} = \frac{1}{5}$

"la fracción es igual a $\frac{1}{6}$ si se añade 1 al denominador" se traduce en . . . $\frac{x}{y+1} = \frac{1}{6}$

Simplificando estas ecuaciones (usando las propiedades de la igualdad) se obtiene :

$$5\cdot(x+1) = y \qquad \text{y} \qquad 6\cdot x = (y+1)$$

que se convierten en el sistema simultáneo:

$$\begin{bmatrix} 5\cdot x - y = -5 & \text{(I)} \\ 6\cdot x - y = 1 & \text{(II)} \end{bmatrix}$$

cuya solución por cualquiera de los métodos explicados anteriormente es : $\begin{pmatrix} x = 6 \\ y = 35 \end{pmatrix}$

de modo que la fracción buscada es $\dfrac{6}{35}$ pues en efecto. . .

$$\frac{6+1}{35} = \frac{7}{35} = \frac{1}{5} \qquad \text{y} \qquad \frac{6}{35+1} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

<u>*Ejemplo*</u> 3. ***Añadiendo al primero de dos números la mitad del segundo, o añadiendo al segundo un tercio del primero, se obtiene 10 en ambos casos. ¿Cuáles son esos números?***

<u>*Solución*</u>: Representemos a los dos números desconocidos por los símbolos x e y . Entonces, de acuerdo al enunciado del problema . . .

"añadiendo al primero la mitad del segundo. . . " se traduce en la ecuación. . . $x + \dfrac{y}{2} = 10$

"añadiendo al segundo un tercio del primero . . " se traduce en la ecuación. . . $\dfrac{x}{3} + y = 10$

ecuaciones que se convierten en el sistema simultáneo:

$$\begin{bmatrix} 2\cdot x + y = 20 & \text{(I)} \\ x + 3\cdot y = 30 & \text{(II)} \end{bmatrix}$$

cuya solución por cualquiera de los métodos elementales es : $\begin{pmatrix} x = 6 \\ y = 8 \end{pmatrix}$ que son los números buscados

y en efecto. . .

"añadiendo al primero la mitad del segundo. . . $6 + \dfrac{8}{2} = 6 + 4 = 10$ se obtiene 10 "

"añadiendo al segundo un tercio del primero . . . $\dfrac{6}{3} + 8 = 2 + 8 = 10$ se obtiene 10 "

<u>*Ejemplo*</u> 4. ***Si al dinero que tiene A se le añaden \$ 36 , tendrá el triple de lo que tiene B ; pero si a B se le quitan \$ 5 tendrá la mitad de lo que tiene A. ¿Cuánto tiene cada uno ?***

<u>*Solución*</u>: Representemos a las dos cantidades desconocidos por los símbolos A y B . Entonces, de acuerdo al enunciado del problema . . .

"añadiendo \$ 36 al dinero de *A* tendrá el triple de *B* " se traduce en. . . $(A+36) = 3\cdot B$

" quitando \$ 5 al dinero de *B* tendrá la mitad de *A* " se traduce en. . . $B-5 = \frac{A}{2}$

ecuaciones que, usando las propiedades de la igualdad, se convierten en el sistema simultáneo:

$$\begin{bmatrix} A-3\cdot B = -36 & \text{(I)} \\ -A+2\cdot B = 10 & \text{(II)} \end{bmatrix}$$

cuya solución por cualquiera de los métodos elementales es : $\begin{pmatrix} A = 42 \\ B = 26 \end{pmatrix}$ que son las cantidades buscadas pues en efecto. . .

$$(42)+36 = 78 = 3\cdot(21)$$

$$(26)-5 = 21 = \frac{(42)}{2}$$

<u>Ejemplo</u> 5. ***Una zorra lleva 60 saltos de ventaja a un galgo que la persigue. Mientras el galgo da 4 saltos, la zorra da 5; pero 3 saltos del perro equivalen a 5 saltos de la zorra. ¿Cuántos saltos dará el galgo para alcanzar a la zorra ?***

<u>*Solución*</u>: Representemos a las dos distancias desconocidas que recorren en cada salto el galgo y la zorra por los símbolos G y Z respectivamente. Entonces, si m es el número de saltos que dió el galgo cuando alcanza a la zorra n es el número de saltos que dá la zorra hasta el momento de ser alcanzada, se sigue que la distancia $(m\cdot G)$ recorrida por el galgo debe ser igual a la distancia $(n\cdot Z)$ recorrida por la zorra más la distancia adicional $(60\cdot Z)$ que los separaba inicialmente, esto es . . .

$$m\cdot G = 60\cdot Z + n\cdot Z$$

Pero del enunciado del problema:

" 3 saltos del perro equivalen a 5 saltos de la zorra" , se traduce en la ecuación: $3\cdot G = 5\cdot Z$ (*)

" mientras el galgo da 4 saltos la sorra da 5" , se traduce en la ecuación $\frac{m}{n} = \frac{4}{5}$ (**)

Asi que substituyendo (*) en la ecuación inicial queda:

$$m\cdot G = (60+n)\cdot\frac{3}{5}\cdot G \qquad \text{es decir. . .} \qquad m = \frac{3}{5}\cdot(60+n)$$

y substituyendo ahora (**) resulta . . .

$$m = \frac{3}{5}\cdot\left(60+\frac{5}{4}\cdot m\right) \qquad \text{es decir . . .} \qquad \left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot m = \frac{3\cdot(60)}{5}$$

de donde se obtiene que el número m de saltos del galgo es $m = 144$

Ejemplo 6. ***Cierto número entero dividido entre la suma de sus dos dígitos da 4 por cociente y 3 de residuo. Se invierten luego los dígitos y se añade 23 al número que resulta, y este suma se divide entre el número dado, obteniéndose 2 por cociente. ¿Cuál es el número ?***

Solución: Representemos a los dos digitos desconocidos del número buscado por los símbolos c y u. Entonces, el número buscado tiene la forma : $(10\cdot c + u)$ y del enunciado del problema . . .

" dividido entre la suma de sus dos dígitos . . ." resulta la ecuación: $\dfrac{10\cdot c + u}{(c+u)} = 4 + \dfrac{3}{c+u}$

" se invierten luego los dígitos y se añade . . . " se traduce en la ecuación $\dfrac{(10\cdot u + c) + 23}{10\cdot c + u} = 2$

ecuaciones que, usando las propiedades de la igualdad, se convierten en el sistema simultáneo:

$$\begin{bmatrix} 6\cdot c - 3\cdot u = 3 & \text{(I)} \\ 19\cdot c - 8\cdot u = 23 & \text{(II)} \end{bmatrix}$$

cuya solución por cualquiera de los métodos elementales es : $\begin{pmatrix} c = 5 \\ u = 9 \end{pmatrix}$, es decir, el número buscado es 59 y en efecto. . .

$$\frac{(59)}{5+9} = \frac{59}{14} = 4 + \frac{3}{14}$$

y

$$\frac{(95)+23}{59} = \frac{118}{59} = 2$$

Ejemplo 7. ***Tres obreros trabajan en una obra. El primero y el segundo trabajando juntos podrian terminar la obra en 8 dias; si el primero y el tercero trabajan juntos pueden terminar la obra en 12 dias, mientras que el segundo y el tercero en 6 dias. ¿Cuánto tiempo tardaría cada uno para hacer esa obra trabajando solo?***

Solución: Buscamos tres cantidades desconocidas . . .

x : número de dias que emplearía el primer obrero trabajando solo.

y : número de dias que emplearía el segundo obrero trabajando solo.

z : número de dias que emplearía el tercer obrero trabajando solo.

Asi que en un dia de trabajo, el primero hace $\dfrac{1}{x}$ partes de la obra , el segundo $\dfrac{1}{y}$ y el tercero $\dfrac{1}{z}$.

Del enunciado. . .

" el 1° y el 2° trabajando juntos terminarían en 8 dias" se traduce la ecuación: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{8}$

" el 1° y el 3° trabajando juntos terminan en 9 dias" se traduce la ecuación: $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{12}$

" el 2° y el 3° trabajando juntos terminan en 10 dias" se traduce la ecuación: $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$

ecuaciones que, bajo el cambio de variables : $u=\frac{1}{x}$, $v=\frac{1}{y}$ y $w=\frac{1}{z}$ se transforman en el sistema simultáneo:

$$\begin{bmatrix} u+v=\frac{1}{8} & (\mathrm{I}) \\ u+w=\frac{1}{12} & (\mathrm{II}) \\ v+w=\frac{1}{6} & (\mathrm{III}) \end{bmatrix}$$

cuya solución por cualquiera de los métodos elementales es : $\begin{pmatrix} u=\frac{1}{48} \\ v=\frac{5}{48} \\ w=\frac{1}{16} \end{pmatrix}$, es decir, el número de dias que emplearía los obreros trabajando solos es

$$x=\frac{1}{u}=48\cdot dias$$

$$y=\frac{1}{v}=\frac{48}{5}=\left(9+\frac{3}{5}\right)\cdot dias$$

$$z=\frac{1}{w}=16\cdot dias$$

<u>*Ejemplo*</u> 8. ***Tengo que repartir $ 450 entre cierto número de personas. Si doy $ 30 a cada hombre y $ 20 a cada mujer, me faltarían $ 110 ; pero si doy $ 25 a cada hombre y $15 a cada mujer no faltará si sobrará nada . ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres hay ?***

<u>*Solución*</u>: Representemos al número de hombres por h y al número de mujeres por el símbolo m .

Los enunciados . . .

" *$ 30 a cada hombre y $ 20 a cada mujer faltarían $ 110* "

" *$ 25 a cada hombre y $ 15 a cada mujer no falta ni sobra* "

se traducen en la ecuación algebráicas

$$30\cdot h+20\cdot m=450+110 \qquad \text{y} \qquad 25\cdot h+15\cdot m=450$$

repectivamente. Es decir se tiene el sistema simultáneo: $\begin{bmatrix} 30\cdot h+20\cdot m=560 & (\mathrm{I}) \\ 25\cdot h+15\cdot m=450 & (\mathrm{II}) \end{bmatrix}$

que se simplifica a . . .

$$\begin{bmatrix} 3\cdot h + 2\cdot m = 56 & (\mathrm{I}) \\ 5\cdot h + 3\cdot m = 90 & (\mathrm{II}) \end{bmatrix}$$

cuya solución por cualquiera de los métodos elementales es : $\begin{pmatrix} h = 12 \\ m = 10 \end{pmatrix}$, es decir, hay 12 hombres y 10 mujeres en el grupo.

<u>*Ejemplo*</u> 9. ***Una aleación de oro y plata pesa 600 gramos en el aire y 560 gramos en el agua. Cuántos gramos de oro y cuántos de plata hay en la aleación, si se sabe que sus pesos específicos respectivos son 19.5 kg/litro y 10.5 kg/litro ?***

<u>*Solución*</u>: Representemos por x e y el peso en kg del oro y de la plata en la aleación respectivamente, entonces. . .

$$x\cdot kg + y\cdot kg = 0.6\cdot kg \qquad \text{es decir} \qquad x + y = 0.6 \qquad (*)$$

Al sumergir en el agua un dm^3 (un litro) de oro o un dm^3 de plata , pierden $1\cdot kg$ de peso debido al principio de Arquimedes y a que el peso específico del agua es precisamente 1 kg / dm^3 .
Esto significa que $19.5\cdot kg$ de oro (o $10.5\cdot kg$ de plata) sumergidos en agua pierden $1\cdot kg$ de peso y por lo tanto $1\cdot kg$ de oro sumergido en agua pierde solamente $\frac{1}{19.5}\cdot kg$ de peso (o $1\cdot kg$ de plata sumergido en agua solo pierde $\frac{1}{10.5}\cdot kg$ de peso) .

Asi que $x\cdot kg$ de oro sumergidos en agua pierden $\frac{x}{19.5}\cdot kg$ de peso (o $y\cdot kg$ de plata sumergidos en agua pierden $\frac{y}{10.5}\cdot kg$ de peso), de modo que el peso total perdido de la aleación sumergida en el agua es $0.600\cdot kg - 0.560\cdot kg = 0.040\cdot kg$,esto es . . .

$$\frac{x}{19.5}\cdot kg + \frac{y}{10.5}\cdot kg = 0.04\cdot kg \ \text{es decir} \qquad \frac{x}{19.5} + \frac{y}{10.5} = 0.04 \qquad (**)$$

las ecuaciones (*) y (**) constituyen el sistema simultáneo:

$$\begin{bmatrix} x + y = \frac{6}{10} & (\mathrm{I}) \\ \frac{2\cdot x}{39} + \frac{2\cdot y}{21} = \frac{4}{100} & (\mathrm{II}) \end{bmatrix}$$

cuya solución por alguno de los métodos elementales es : $\begin{pmatrix} x = \frac{39}{100} \\ y = \frac{21}{100} \end{pmatrix}$, es decir, hay 390 gramos de oro y 210 gramos de plata en la aleación.

<u>*EJERCICIO*</u> 20 .

1. La suma de dos números es 65 . Su diferencia dividida entre el número menor da 8 por cociente y 5 por residuo. ¿Cuáles son esos números ?

2. Añadiendo un 1 a ambos términos de una fracción de números enteros, se hace igual a $\frac{2}{3}$; pero restando 1 a ambos términos , se vuelve $\frac{1}{2}$, ¿Cual es esa fracción ?.

3. Dividir 180 en tres partes de modo que la mitad de la primera, el tercio de la segunda y el cuarto de la tercera sean tres números iguales.

4. Triplicando el numerador de un quebrado y aumentado en 8 el denominador, el quebrado vale $\frac{9}{8}$; dividiendo el denominador entre dos y diminuyendo en 7 el numerador, el valor del quebrado es $\frac{1}{4}$. Hallar el quebrado.

5. El perímetro de un rectángulo es 300 m . La base tiene 30 m más que la altura. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo ?

6. Si Pablo le diese \$ 12 a Pedro, ambos tendrían la misma cantidad de dinero; pero si Pedro le da \$ 4 a Pablo, entonces éste tendrá el triple de dinero que Pedro. ¿Cuánto tiene cada uno ? .

7. La suma de los tres dígitos de un número entero es 17 . La suma del triple del primer dígito, con el quíntuplo del segundo y el cuádruplo del tercero da 70. Si se añade 297 al número inicial, los dígitos resultan invertidos. Hállese el número.

8. Dos fuentes, manando una 3 dias y 5 dias la otra, han llenado un depósito de 1200 m^3 . Las mismas fuentes, manando durante 2 y 4 dias respectivamente pueden llenar otro depósito de 840 m^3 . ¿Qué cantidad de agua da cada fuente por dia ?.

9. Una persona compró cierto número de naranjas. Si por el mismo dinero la hubiesen dado 56 naranjas más, cada una le habría costado \$ 1 menos ; pero si le hubiesen dado 24 naranjas menos, le habrían salido a \$ 1 más cada una. ¿Cuántas naranjas compró y a qué precio cada una ?.

10. Una suma de dinero se divide en partes iguales entre varias personas. Si hubieran sido m personas más, cada una habría recibido \$ a pesos menos; pero si hubieran sido n menos, le habría tocado \$ b pesos más a cada una. ¿Cuántas personas eran y cuánto recibió cada una ?

11. Una suma de dinero invertida a interés simple asciende a \$ 420 en 3 años ya \$ 480 en 7 años. ¿Cuál es el capital invertido y cual es el porcentage de interés ?.

12. Un tren que va de A a B tiene que pararse, debido a un accidente durante 45 minutos; luego reanuda su marcha a una velocidad de $\frac{5}{6}$ de lo que era antes del accidente, y llega por eso a B con 75 minutos de atraso. Si el percance hubiera sucedido 45 km más cerca de A , el retardo habría sido de 90 minutos. Hállese la velocidad del tren antes del accidente y la distancia del punto de parada hasta B.

13. Dícele Juan a Pedro : ¿Qué edad tengo si tengo el doble de la que tú tenías cuando yo tenía la que tu tienes, sabiendo que cuando tú tengas la que yo tengo, entre los dos sumaremos 63 años ?.

14. Un ganadero vende una partida de 9 caballos y 7 vacas por \$ 11 400 y otra partida de 6 caballos y 11 vacas al mismo precio y por la misma cantidad. ¿A como vendió cada caballo y cada vaca ?

15. El piso de una habitación rectangular es tal que si tuviera $2\ m$ más de ancho y $3\ m$ más de largo tendría $64\ m^2$ más de superficie; pero si tuviera $3\ m$ más de ancho y $2\ m$ más de largo la superficie aumentaría en $68\ m^2$. Hallar las dimensiones actuales del piso.

16. Un tendero compró cierto número de peras a \$ 20 la docena, mas $\frac{10}{9}$ de éste número a \$ 16 la docena Las vendió todas a \$ 22 la docena y ganó en total \$ 234 . ¿ Cuántas docenas de peras compró de cada clase ?

17. Tres viajeros han gastado cierta cantidad en un hotel. La suma del gasto del primero con el del segundo, es \$2 más que el tercero ; el primero y el tercero juntos, han gastado \$ 6 más que el segundo; por último, el segundo y el tercero han gastado entre los dos, \$ 10 más que el primero. ¿Cuánto gastó cada uno ?

18. En una asamblea se adoptó una resolución por una mayoría de 10 votos; si una cuarta parte de los votos en pro hubiesen sido en contra, la moción habría sido desechada por mayoría de 6 votos. ¿Cuántos votos hubo en pro y cuántos en contra ?.

19. Un equipo de remeros puede navegar 10 *km* en 50 minutos yendo con la corriente, y 12 *km* en hora y media, contra corriente. Hállese la velocidad de la corriente y la de la embarcación en agua tranquila en *km/h* .

20. Un obrero aceptó trabajar en una hacienda en las siguientes condiciones: por cada dia que trabajara se le darían \$ 5 y los alimentos, y por cada dia que dejara de trabajar, se le descontarían \$ 2.50 por sus alimentos. al cabo de 30 dias recibió \$ 105 . ¿Cuántos dias trabajó y cuántos dejó de trabajar ?

21. Dos hermanos compraron a partes iguales una televisión con costo de \$ 2 200 . El hermano mayor invirtió en ésta operación la mitad de sus ahorros y el hermano menor las dos terceras partes de los suyos. Después de la compra, todavía reunían entre los dos \$ 1 600 de ahorros. ¿Cuánto era el ahorro inicial de cada uno ?.

22. En ocasión de un dia de asueto, un estudiante aprovechó para ir al hogar paterno, yendo y viniendo por diferentes caminos. El viaje de regreso fué 4 *km* más corto que la mitad del viaje de ida. El recorrido total, ida y regreso fué de 68 *km* . ¿Cuál fué la distancia recorrida en cada tramo ?.

23. El gerente de una librería estimaba un ingreso de \$ 400 en la venta de plumas a \$ 5 cada una y de lápices a \$ 2.50 cada uno. Después de haber vendido la mitad de las plumas y la cuarta parte de los lápices, reduce el precio de las plumas a \$ 4.50 y el de los lápices a \$ 2.25 . Este remanente le produce un ingreso de \$ 202.50 . ¿Cuántas plumas y cuántos lápices tenía inicialmente ?.

24. A cierta ciudad situada en una isla se transporta diariamente un promedio de 50 bolsas de correspondencia. haciéndose parte de la entrega en camión y parte en helicóptero. En cada viaje el camión transporta 10 bolsas y el helicóptero 6. El helicóptero efectúa un viaje más que el doble de viajes del camión. ¿Cuántos viajes efectúa cada uno al dia ?.

25. Alicia y Beatriz trabajaron juntas 5 horas, logrando realizar en este tiempo la mitad del trabajo que pensaban presentar en una exposición. La tarde siguiente, Alicia trabajó sola durante dos horas, luego se le unio Beatriz y juntas terminaron en cuatro horas más. ¿Cuánto tiempo le hubiera tomado a cada una hacer sola ese trabajo ?

26. La distancia entre una ciudad y el pueblo más próximo es 96 *km*. Un camión de correos sale a las 8:00 de de la mañana de la ciudad rumbo al pueblo y a las 8:36 horas sale del pueblo un autobús rumbo a la ciudad. A las 9:00 de la mañana se cruzan en el camino. En el viaje de regreso vuelven a encontrarse a las 10:50 horas. Suponiendo que la velocidad de cada vehículo permanece constante en todo el viaje, determínese la velocidad de cada uno, sabiendo que ambos permanecieron 30 minutos en su punto de destino. ¿A que distancia de la ciduad se vuelven a cruzar en el viaje de regreso ?

27. Tres jóvenes, Teodoro, Raymundo y Juan acordaron encerar sus autos para darles más lustre. El primer dia, trabajando entre los tres terminaron el auto de Teodoro en una hora y media. El segundo dia Teodoro ayudó a Juan a pulir su auto en dos horas y el tercer dia Juan ayudó a Raymundo a lustrar su auto en dos horas y un cuarto. ¿Cuánto tiempo hubiera necesitado cada muchacho para lustrar su propio auto suponiendo que cada uno de ellos desarrolla igual trabajo y que los autos son idénticos ? .

28. Una persona envía 340 *kg* de mercancía de Morelia a la ciudad de México y 364 *kg* de Morelia a la ciudad de Guadalajara. La tarifa en ambos casos es la misma 25 centavos por kilogramo por cada 100 kilómetros. Si la factura importó $ 464.25 y ampara un total de 525 kilómetros, ¿qué tan lejos queda Morelia de las ciudades de México y de Guadalajara ?

29. Dos grupos de turistas parten al mismo tiempo de un albergue en direcciones opuestas para recorrer una carretera escénica cuyo trazo es una trayectoria cerrada. Cuando vuelven a encontrarse, uno de los grupos ha recorrido 38 kilómetros y el otro 57 kilómetros. Determínese la velocidad promedio de cada grupo si el segundo regresó al albergue cincuenta minutos antes que el primero.

30. Un panadero produce 3 variedades de galletas cuyos precios son $ 0.60 , $ 0.90 y $ 1.20 por docena respectivamente. Con las dos terceras partes de la variedad de 60 y toda la variedad de 90 centavos forma una mezcla con precio resultante de $ 0.80 por docena. Lo que le queda de la variedad de 60 centavos lo mezcla con la variedad de $ 1.20 y produce otra mezcla con precio de venta de $ 1.00. Si originalmente tenía un total de 27 docenas, ¿cuántas docenas de cada variedad tenía inicialmente ?

<u>*EJERCICIO*</u> 20 . *Respuestas* (*problemas impares*)

1. 59 y 6
3. 40 , 60 y 80
5. 60 *m* y 90 *m*
7. 467
9. 84 naranjas a $ 2.50 c/u
11. $ 375, 4%
13. Juan $28\cdot$ ***años***, Pedro $21\cdot$ ***años***
15. Ancho: $10\cdot m$; largo $14\cdot m$
17. $ 4 , $ 6, $ 8
19. $2\cdot\frac{km}{h}$, $10\cdot\frac{km}{h}$
21. $ 2000 y $ 1800
23. 60 plumas, 40 lápices.
25. 20 horas cada una
27. Teodoro: $4.5\cdot h$, Raymundo $3.6\cdot h$, Juan $6\cdot h$
29. $57\cdot\frac{km}{h}$, y : $38\cdot\frac{km}{h}$.

EJERCICIO 17 Respuestas (problemas pares)

2. $x = 3$

4. $x = -2, 2, -6$

6. $x = -1$

8. $x = 35$

10. $x = 4$

12. Identidad

14. Ecuación: Solución $x = 4$

16. Ecuación: Solución $x = \frac{1}{3}$

18. Identidad

20. $x = 3$

22. $x = \frac{3}{5}$

24. $x = 3$

26. $x = 2$

28. $x = 3$

30. $x = 6$

32. $x = 12$

34. $x = 8$

36. $x = 16$

38. $x = 10$

40. $x = 5$

42. $x = \frac{1}{a}$

44. $x = \frac{a}{(a-b)}$

46. $x = 7$

48. $x = 5$

50. $x = 6$

52. $x = 11$

54. $x = 3$

56. $x = 2$

58. $x = \frac{a}{b}$

60. $x = \frac{s \cdot r}{(r+s)}$

62. $x = 4$

64. $x = 7$

66. $x = 5$

68. $x = 7$

70. $x = -3$

72. $x = -4$

74. $x = 3$

76. $x = 2$

78. No hay solución

80. No hay solución

82. No hay solución

84. No hay solución

86. No hay solución

88. $b = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot d$

90. $a = \frac{2 \cdot \left(x - x_o - v \cdot t\right)}{t^2}$

92. $b = \frac{(2 \cdot A - a \cdot h)}{h}$

94. $S = V - \frac{V}{P} \cdot f$

EJERCICIO 18 <u>*Respuestas*</u> *(problemas pares)*

2. $L = \frac{1}{2}\cdot P - a$

4. $h = \frac{1}{2}\cdot\frac{V}{(p\cdot r)}$

6. $L = \frac{(-S+R)}{R}$

8. $b = \frac{(2\cdot A - a\cdot h)}{h}$

10. $\theta = 2\cdot\frac{A}{r^2}$

12. $a = \sqrt{\frac{3\cdot V}{4\cdot\pi\cdot b}}$

14. $L_3 = \frac{-L\cdot L_1\cdot L_2}{L\cdot L_2 + L\cdot L_1 - L_1\cdot L_2}$

16. $R_1 = \frac{(n-1)\cdot(f\cdot R_2)}{(R_2 + f\cdot n - f)}$

18. $r = \frac{S-a}{S-L}$

20. 262 , 263

22. 185 , 37

24. al menos 97

26. 13.5

28. 1192.5

30. 2400.

32 $ 22 316.98

34. 20 mujeres

36. $8\cdot min + 20\cdot seg$

38. 12 billetes de $ 10 y 11 de $ 5

40. a) 15 años, b) 35 años

42. $\frac{16}{33}$ litros de gasolina

44. *A*: 2.44 h *B*: 1.94 h

46. Lenta : 4 h Rápida : 2.5 h

48. 82 alumnos

50. Sombrero : $ 113

52. 60 hombres , 180 mujeres

54. Samuel viaja a $80\cdot\frac{km}{h}$

56. A su encuentro , 54 min.

58. 1 hora y 16 minutos.

60. 5 horas y 15 minutos

62. 2.5 litros

64. $40\cdot cm^3$ de agua

66. $20\cdot\frac{km}{h}$

<u>*EJERCICIO*</u> 19 . <u>*Respuestas*</u> (*problemas pares*)

2. $x = -1 , y = -2$
4. $x = -7 , y = 11$
6. $x = \frac{16}{31} , y = \frac{19}{31}$
8. $x = 12 , y = -7$
10. $x = -4 , y = \frac{3}{2}$
12. $x = \frac{-4}{3} , y = \frac{3}{2}$
14. $x = 5 , y = -3 , z = 2$
16. $x = -2 , y = \frac{13}{3} , z = -3$
18. $x = \frac{-1}{2} , y = \frac{-2}{3} , z = \frac{3}{4}$
20. $x = \frac{3}{19} , y = \frac{-10}{19}$
22. $x = \frac{12}{161} , y = \frac{-228}{161}$
24. $x = -15 , y = -15$
26. $x = 2 , y = 1$
28. $x = -3 , y = 2$
30. $x = 1 , y = 1$
32. $x = 3 , y = 2$
34. $x = 5 , y = 0 , z = 1$
36.

<u>*EJERCICIO*</u> 20 . *Respuestas* (*problemas pares*)

2. $\frac{3}{5}$
4. $\frac{9}{16}$
6. Pablo \$ 44 , Pedro \$ 20
8. $300 \cdot \frac{m^3}{dia}$ y $60 \cdot \frac{m^3}{dia}$
10. Personas : $\frac{m \cdot n \cdot (a+b)}{b \cdot m - a \cdot n}$, Cada una \$ $\left[\frac{a \cdot b \cdot (m+n)}{b \cdot m - a \cdot n} \right]$
12. $36 \cdot \frac{km}{h}$, $90 \cdot km$
14. caballo \$ 800, vaca \$ 600
16. 27 de \$ 20, 30 de \$ 16
18. 32 en pro, 22 en contra
20. Trabajó 24 dias y 6 no trabajó
22. regreso 20 *km*, ida 48 *km*
24. Camión 2, helicóptero 5
26. Camión $64 \cdot \frac{km}{h}$, autobús : $80 \cdot \frac{km}{h}$. a los $\left(42 + \frac{2}{3} \right) \cdot km$
28. Morelia-México : 225 *km* , Morelia-Guadalajara 300 *km* .
30. 9 docenas de \$ 0.60, 12 docenas de \$ 0.9 y 6 docenas de \$ 1.20