CAPÍTULO VII : ECUACIONES CUADRÁTICAS

7.1 Ecuaciones Cuadráticas .

Hasta aquí se han escogido cuidadosa y deliberadamente los problemas para que las ecuaciones obtenidas se hayan reducido a la forma lineal. Ahora centraremos nuestra atención sobre ecuaciones que se pueden escribir en la forma *cuadrática general*. . .

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0 \qquad ; \qquad a \neq 0$$

en la cual las constantes a , b y c son números reales.

Se exponen enseguida dos métodos para resolver ecuaciones cuadraticas. . . .

1° *Solución de una ecuación cuadrática por Factorización*

Este metodo se basa en la propiedad del cero, (vista en la sección 1-6)

$$\boxed{\textit{Si } a\cdot b = 0 \quad \textit{entonces} \quad a = 0 \ \textit{y/o} \ b = 0}$$

lo cual significa que si se factoriza una ecuación cuadratica general en dos factores lineales, (a y b) entonces sus soluciones se encuentran igualando a cero cada factor.

Por ejemplo, dado que la ecuación cuadrática $x^2 - 3\cdot x - 10 = 0$ se factoriza como . . .

$$(x+2)\cdot(x-5) = 0$$

las raíces de ésta ecuación se hallan igualando a cero cada uno de sus factores lineales. . .

$$(x+2) = 0 \quad \text{implica que} \quad x = -2$$

$$(x-5) = 0 \quad \text{implica que} \quad x = 5$$

Precaución : No use éste metodo en ecuaciones cuadráticas *que no estén escritas en la forma general*, por ejemplo, la siguiente aplicación de la factorización es incorrecta. . .

$$x^2 - 3\cdot x - 10 = 7$$

$$(x+2)\cdot(x-5) = 7$$

entonces. . . $(x+2) = 7$ y $(x-5) = 7$

de donde so obtienen las "soluciones" $x = (7-2) = 5$ y $x = (7+5) = 12$. Sin embargo, como se puede comprobar fácilmente, éstos valores para la variable x no satisfacen la ecuación cuadrática inicial.

Ejemplo 1 . *Resolver cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas por factorización*

a) $2\cdot x^2 + 9\cdot x + 7 = 3$ *b)* $6\cdot x^2 - 3\cdot x = 0$ *c)* $9\cdot x^2 - 6\cdot x + 1 = 0$

Solución . *a)* $2\cdot x^2 + 9\cdot x + (7-3) = 0$

$2\cdot x^2 + 9\cdot x + 4 = 0$ *Transformando la ecuación a la forma general* .

$(x+4)\cdot(2\cdot x+1) = 0$ *Factorizando*

$(x+4) = 0$; $(2\cdot x+1) = 0$ *Igualando a cero los factores lineales* .

$x = -4$; $x = -\left(\frac{1}{2}\right)$ *Soluciones*

b) $6 \cdot x^2 - 3 \cdot x = 0$ *Ecuación que ya tiene la forma general.*

$3 \cdot x \cdot (2 \cdot x - 1) = 0$ *Factorizando*

$3 \cdot x = 0$; $(2 \cdot x - 1) = 0$ *Igualando a cero los factores lineales .*

$x = 0$; $x = \left(\frac{1}{2}\right)$ *Soluciones*

c) $9 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 1 = 0$ *Ecuación que ya tiene la forma general.*

$(3 \cdot x - 1)^2 = 0$ *Factorizando*

$(3 \cdot x - 1) = 0$; $(3 \cdot x - 1) = 0$ *Igualando a cero los factores lineales .*

$x = \left(\frac{1}{3}\right)$; $x = \left(\frac{1}{3}\right)$ *Solucion repetida*

La forma cuadrática especial $x^2 = d$, con $d > 0$ tiene dos métodos de solución muy sencillos. . .

- *Por factorización* :

$x^2 - \left(\sqrt{d}\right)^2 = 0$ *Transformando la ecuación a la forma general.*

$\left(x + \sqrt{d}\right) \cdot \left(x - \sqrt{d}\right) = 0$ *Factorización de una diferencia de cuadrados*

$x + \sqrt{d} = 0$; $x - \sqrt{d} = 0$ *Igualando a cero los factores lineales .*

$x = -\sqrt{d}$; $x = \sqrt{d}$ *Soluciones*

- *Principio de la raíz cuadrada* .

$\sqrt{x^2} = \sqrt{d}$ *Tomando la raiz cuadrada en ambos miembros de la ecuación .*

$x = -\sqrt{d}$; $x = \sqrt{d}$ *Hay dos soluciones para la raiz cuadrada de un número positivo*

El siguiente ejemplo muestra que tan efectivos pueden ser éstos principios. . .

Ejemplo 2 . Resolver las ecuaciones cuadráticas:

a) $4 \cdot x^2 = 12$; *b)* $(x - 3)^2 = 7$

<u>*Solución*</u> . *a)* $4 \cdot x^2 = 12 \longrightarrow x^2 = \frac{12}{4}$

$x^2 = 3$ *Y por el principio de la raiz cuadrada se sigue que:* $x = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

b) $(x-3)^2 = 7$ *Y por el principio de la raiz cuadrada se sigue que:*

$(x-3) = \begin{pmatrix} \sqrt{7} \\ -\sqrt{7} \end{pmatrix}$ *es decir :* $x = \begin{pmatrix} 3+\sqrt{7} \\ 3-\sqrt{7} \end{pmatrix}$

2° <u>*Solución de una ecuación cuadrática completando un trinomio cuadrado perfecto*</u> *(TCP)*
La ecuación del ejemplo anterior nos conduce a una situación muy interesante. Suponga que desarrollamos la ecuación $(x-3)^2 = 7$ para obtener . . .

$x^2 - 6 \cdot x + 9 = 7$ es decir . . . $x^2 - 6 \cdot x + 2 = 0$

Sabemos que ésta última ecuación es equivalente a la original y por lo tanto tiene las mismas soluciones que aquélla sin embargo, ésta última ecuación *no es factorizable en los racionales* y no podríamos hallar sus soluciones a menos que pudiéramos revertir los pasos que nos llevaron a ella.
El procedimiento para invertir esos pasos se llama completar el trionomio cuadrado perfecto. Observe como funciona en la ecuación anterior :

$x^2 - 6 \cdot x + 2 = 0$

$x^2 - 6 \cdot x = -2$ *Trasladando la constante al miembro derecho*

$x^2 - 6 \cdot x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = -2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$ *Agregando a ambos miembros de la ecuación el cuadrado de la mitad del coeficiente de* x

$x^2 - 6 \cdot x + 9 = 7$ *Simplificando*

$(x-3)^2 = 7$ *Un trinomio cuadrado perfecto es el cuadrado de un binomio.*

Y ahora la solución se puede obtener usando el principio de la raíz cuadrada.

- ***NOTA*** : *Como es mas fácil factorizar que completar el cuadrado, primero verificar siempre si una ecuación cuadrática dada es factorizable .*

Recordemos como completar el trinomio cuadrado perfecto para el trinomio de una ecuación cuadrática

- Escribir la ecuación cuadrática en su forma general normal: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$
- Dividir ambos miembros de la ecuación entre el coeficiente de x^2 para obtener :

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right) \cdot x + \left(\frac{c}{a}\right) = 0$$

- Agregar y restar a la ecuación anterior ***el cuadrado de la mitad del coeficiente de*** x , es decir la cantidad : $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2$ para obtener. . .

$$\left[x^2+\left(\frac{b}{a}\right)\cdot x+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2\right]+\left(\frac{c}{a}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2=0$$

- Los primeros tres terminos dentro del paréntesis recto constituyen el cuadrado de un binomio, por lo cual la ecuación cuadrática se puede escribir como . . .

$$\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4\cdot a^2}\right)=0$$

ó bién . . .

$$\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2=\left(\frac{b^2}{4\cdot a^2}-\frac{c}{a}\right)$$

- Resolver por el principio de la raiza cuadrada, para obtener . . .

$$x+\frac{b}{2\cdot a}=.+\sqrt{\frac{b^2}{4\cdot a^2}-\frac{c}{a}} \quad ; \quad x+\frac{b}{2\cdot a}=-\sqrt{\frac{b^2}{4\cdot a^2}-\frac{c}{a}}$$

es decir . . . $\boxed{x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}}$; $\boxed{x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}}$

Ejemplo 3 . *Resolver la ecuación cuadrática* $3\cdot x^2-4\cdot x-5=0$ *completando el trinomio cuadrado*

Solución . Por inspección, podemos verificar que ésta ecuación no es factorizable como el producto de dos binomios con coeficientes racionales. Además, ya que el coeficiente líder no es la unidad, primero dividimos ambos miembros de la ecuación por 3 :

$$\frac{3\cdot x^2-4\cdot x-5}{3}=\frac{0}{3}$$

$$x^2-\frac{4}{3}\cdot x-\frac{5}{3}=0$$

$$x^2-\frac{4}{3}\cdot x+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\right)^2-\frac{5}{3}-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\right)^2=0$$

Agregando y restando a la ecuación el cuadrado de la mitad del coeficiente de x

$$\left(x-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\right)^2=\frac{5}{3}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\right)^2$$

Un trinomio cuadrado perfecto es el cuadrado de un binomio y trasladando la constante al miembro derecho.

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{19}{9}$$

Simplificando

$$\boxed{x=\frac{2}{3}+\sqrt{\frac{19}{9}}} \quad ; \quad \boxed{x=\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{19}{9}}}$$

Obtención de las soluciones por el principio de la raiz cuadrada

El procedimiento de completar el cuadrado perfecto del trinomio, permite determinar *una fórmula general* para resolver ecuaciones cuadráticas, como ya se indicó previamente; pero además, también es útil para transformar algunas expresiones algebráicas para simplificar operaciones del Cálculo. Por ejemplo . . .

Ejemplo 4 . (*Completando el cuadrado en expresiones algebráicas*)
Transformar el denominador de las siguientes expresiones a una suma o diferencia de cuadrados.

a) $\dfrac{1}{2\cdot x^2-x-3}$ b) $\sqrt{3\cdot x-x^2}$

Solución .
a) Siguiendo el procedimiento para completar un TCP se tiene. . .

$$\frac{1}{2\cdot x^2-x-3}=\frac{1}{2\cdot\left(x^2-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\right)}$$

agregando y restando ahora el cuadrado de la mitad del coeficiente de x se obtiene . . .

$$\frac{1}{2\cdot x^2-x-3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left[x^2-\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{16}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2}$$

es por eso que esta fracción se factoriza como . . .

$$\frac{1}{2\cdot x^2-x-3}=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{\left(x-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{4}}\right]\cdot\left[\frac{1}{\left(x-\frac{1}{4}\right)-\frac{5}{4}}\right]=\boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)}}$$

b) El signo negativo de x^2 complica un poco las cosas para el procedimiento de completar el TCP .
Note Ud. como se maneja esta dificultad :

$$3\cdot x - x^2 = -\left(x^2 - 3\cdot x\right)$$ *Factorizando el signo negativo*

$$= -\left[x^2 - 3\cdot x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]$$ *Sumado y restando el cuadrado de la mitad del coeficiente de* x .

$$= -\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]$$ *Factorizando el trinomio*

$$= \frac{9}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$ *Quitando paréntesis*

es por eso que este radical se factoriza como . . .

. . .

$$\sqrt{3\cdot x - x^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left[\frac{3}{2} + \left(x - \frac{3}{2}\right)\right]\cdot\left[\frac{3}{2} - \left(x - \frac{3}{2}\right)\right]}$$

$$= \sqrt{x}\cdot\sqrt{3 - x}$$

como era de esperarse.

<u>*EJERCICIO*</u> 19

I. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por factorizacion.

1. $x^2 - 2\cdot x - 8 = 0$
2. $x^2 - 10\cdot x + 9 = 0$
3. $x^2 + 10\cdot x + 25 = 0$
4. $x^2 - 14\cdot x + 49 = 0$
5. $4\cdot x^2 + 12\cdot x + 9 = 0$
6. $16\cdot x^2 + 56\cdot x + 49 = 0$
7. $6\cdot x^2 + 3\cdot x = 0$
8. $11\cdot x^2 - 33\cdot x = 0$
9. $16\cdot x^2 - 9 = 0$
10. $3 + 5\cdot x - 2\cdot x^2 = 0$
11. $50 + 5\cdot x = 3\cdot x^2$
12. $12\cdot x = x^2 + 27$
13. $(x + a)^2 - b^2 = 0$
14. $a^2\cdot x^2 - b^2 = 0$
15. $-x^2 - 4\cdot x = 0$
16. $4\cdot x^2 - 9\cdot x + 2 = 0$
17. $3\cdot x^2 + 10\cdot x - 8 = 0$
18. $4\cdot x^2 + 3\cdot x = 0$
19. $4\cdot x^2 - 9 = 9\cdot x$
20. $5\cdot x^2 + 16\cdot x - 16 = 0$
21. $6\cdot x^2 = 12 + x$
22. $6\cdot x^2 + 4\cdot x = 0$
23. $4\cdot x^2 + 4\cdot x - 15 = 0$
24. $10\cdot x^2 + 21\cdot x + 9 = 0$
25. $30\cdot x^2 - x - 20 = 0$
26. $24\cdot x^2 - 2\cdot x = 15$
27. $35\cdot x^2 + 2\cdot x = 24$
28. $36\cdot x^2 + 35 = 72\cdot x$
29. $35 = 54\cdot x + 72\cdot x^2$
30. $56\cdot x^2 - 63 = 62\cdot x$

31. $x^2 - c \cdot x - 6 \cdot c^2 = 0$
32. $6 \cdot x^2 + 5 \cdot b \cdot x = 6 \cdot b^2$
33. $2 \cdot p^2 \cdot x^2 + p \cdot q \cdot x - 15 \cdot q^2 = 0$
34. $2 \cdot a \cdot x^2 - 2 \cdot b \cdot x + a \cdot b \cdot x - b^2 = 0$

II . Resolver usando el principio de la raíz cuadrada.

35. $x^2 = 16$
36. $x^2 = 144$
37. $x^2 = 27$
38. $9 \cdot x^2 = 25$
39. $7 \cdot x^2 = 32$
40. $(x+3)^2 = 81$
41. $(x+13)^2 = 21$
42. $(x+5)^2 = (x+4)^2$
43. $(x-7)^2 = (x+3)^2$
44. $9 \cdot x^2 - 16 = 0$
45. $3 \cdot x^2 - 20 = -3 \cdot x^2 + 7$
46. $5 \cdot x^2 - 10 = x^2 + 15$

III . Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas completando el trinomio cuadrado perfecto.

47. $x^2 - 2 \cdot x - 2 = 0$
48. $x^2 + 6 \cdot x - 13 = 0$
49. $x^2 - 2 \cdot x - 5 = 0$
50. $-x^2 - 4 \cdot x = 0$
51. $x^2 - 2 \cdot x = 0$
52. $4 \cdot x - x^2 = 0$
53. $9 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 5 = 0$
54. $5 + 4 \cdot x - x^2 = 0$
55. $9 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 3 = 0$
56. $4 \cdot x = 4 \cdot x^2 - 3$
57. $80 + 6 \cdot x = 9 \cdot x^2$
58. $50 \cdot x^2 - 60 \cdot x - 7 = 0$
59. $80 + 6 \cdot x = 9 \cdot x^2$
60. $4 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 99 = 0$
61. $16 \cdot x^2 + 10 \cdot x = 9$
62. $8 \cdot x^2 - 15 = -2 \cdot x$
63. $4 \cdot x^2 + 8 \cdot x = 1$
64. $9 \cdot x^2 - 2 = 18 \cdot x$
65. $6 \cdot x + 3 = 2 \cdot x^2$
66. $3 \cdot x^2 + 1 = 5 \cdot x$
67. $4 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 2 = 0$
68. $x^2 = 2 \cdot x + 5$
69. $x^2 - a \cdot b - a^2 = b \cdot x$
70. $x^2 = 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + a \cdot b \cdot x$
71. $a \cdot x^2 = a + b - b \cdot x$
72. $(a-b) \cdot x^2 = 2 \cdot b \cdot x + 4 \cdot a$
73. $6 \cdot x^2 + (b - 2 \cdot a) \cdot x = b^2 + a \cdot b$
74. $a^2 \cdot x^2 - b^2 = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a^2 \cdot x$
75. $\left(a^2 - b^2\right) \cdot x^2 - 4 \cdot a \cdot b \cdot x + b^2 = a^2$
76. $a \cdot b^2 \cdot x^2 - b - a = b^2 \cdot x$
77. $4 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 4 = x^2 - x$
78. $2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 1 = x^2 - 2$
79. $x^2 - 5 \cdot x - 2 = 0$

EJERCICIO 19 Respuestas (problemas impares)

1. $\begin{pmatrix} x = -2 \\ x = 4 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} x = -5 \\ x = -5 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} x = \frac{-3}{2} \\ x = \frac{-3}{2} \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} x = 0 \\ x = \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} x = \frac{3}{4} \\ x = \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} x = \frac{-10}{3} \\ x = 5 \end{pmatrix}$ 13. $\begin{pmatrix} x = -b - a \\ x = b - a \end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix} x = 0 \\ x = -4 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} x = -4 \\ x = \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ 19. $\begin{pmatrix} x = \frac{-3}{4} \\ x = 3 \end{pmatrix}$ 21. $\begin{pmatrix} x = \frac{-4}{3} \\ x = \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ 23. $\begin{pmatrix} x = \frac{-5}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} x = \frac{-4}{5} \\ x = \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ 27. $\begin{pmatrix} x = \frac{-6}{7} \\ x = \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ 29 $\begin{pmatrix} x = \frac{-7}{6} \\ x = \frac{5}{12} \end{pmatrix}$ 31. $\begin{pmatrix} x = -2 \cdot c \\ x = 3 \cdot c \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} x = \frac{5}{2} \cdot \frac{q}{p} \\ x = -3 \cdot \frac{q}{p} \end{pmatrix}$ 35. $\begin{pmatrix} x = 4 \\ x = -4 \end{pmatrix}$ 37. $\begin{pmatrix} x = 3 \cdot \sqrt{3} \\ x = -3 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$ 39. $\begin{pmatrix} x = \frac{4}{7} \cdot \sqrt{14} \\ x = \frac{-4}{7} \cdot \sqrt{14} \end{pmatrix}$

41. $\begin{pmatrix} x = -13 + \sqrt{21} \\ x = -13 - \sqrt{21} \end{pmatrix}$ 43. $x = 2$ 45. $\begin{pmatrix} x = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \\ x = \frac{-3}{2} \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}$ 47. $\begin{pmatrix} x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$

49. $\begin{pmatrix} x = 1 + \sqrt{6} \\ x = 1 - \sqrt{6} \end{pmatrix}$ 51. $\begin{pmatrix} x = 0 \\ x = 2 \end{pmatrix}$ 53. $\begin{pmatrix} x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ 55. $\begin{pmatrix} x = -1 \\ x = \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$

57. $\begin{pmatrix} x = \frac{-8}{3} \\ x = \frac{10}{3} \end{pmatrix}$ 59. $\begin{pmatrix} x = \frac{-8}{3} \\ x = \frac{10}{3} \end{pmatrix}$ 61. $\begin{pmatrix} x = \frac{-9}{8} \\ x = \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 63. $\begin{pmatrix} x = -1 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \\ x = -1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \end{pmatrix}$

65. $\begin{pmatrix} x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{15} \\ x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{15} \end{pmatrix}$ 67. $\begin{pmatrix} x = \frac{-7+\sqrt{17}}{8} \\ x = \frac{-7-\sqrt{17}}{8} \end{pmatrix}$ 69. $\begin{pmatrix} x = -a \\ x = a+b \end{pmatrix}$ 71. $\begin{pmatrix} x = 1 \\ x = \frac{-a-b}{a} \end{pmatrix}$

73. $\begin{pmatrix} x = \frac{-1}{2}\cdot b \\ x = \frac{a+b}{3} \end{pmatrix}$ 75. $\begin{pmatrix} x = \frac{a+b}{a-b} \\ x = \frac{-a+b}{a+b} \end{pmatrix}$ 77. $\begin{pmatrix} \frac{-3+\sqrt{57}}{6} \\ \frac{-3-\sqrt{57}}{6} \end{pmatrix}$ 79. $\begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{33}}{2} \\ \frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}$

7.2 L<u>a Fórmula cuadrática.</u>

Como se vió anteriormente, el procedimiento de completar el trinomio cuadrado perfecto (TCP) para una ecuación cuadrática escrita en la forma general $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$, deriva en una fórmula de la cual se obtienen las soluciones para cualquier ecuación cuadrática :

$$\boxed{x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}} \quad \text{y} \quad \boxed{x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}}$$

Fórmulas que se deben memorizar y comprender.

A medida que Usted avance en matemáticas, encontrará que primero se presenta la solución general de un problema (el camino largo) y después se obtienen de ella técnicas mas rápidas de solución. (el camino corto) .
La solución general fortalece el entendimiento, las técnicas fortalecen la eficiencia. En matemáticas valoramos ambos aspectos.

Notemos que la suma y el producto de las dos soluciones generales para una ecuación cuadrática son:

$$(x_1 + x_2) = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\right) + \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\right) = \frac{-b}{2\cdot a} + \frac{-b}{2\cdot a} = \boxed{\frac{-b}{a}}$$

y

$$(x_1)\cdot(x_2) = \left(\frac{-b}{2\cdot a} + \frac{\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\right)\cdot\left(\frac{-b}{2\cdot a} - \frac{\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\right) = \left(\frac{-b}{2\cdot a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\right)^2$$

por ser binomios conjugados. Simplificando queda. . .

$$(x_1)\cdot(x_2) = \frac{b^2}{4\cdot a^2} - \left(\frac{b^2}{4\cdot a^2} - \frac{4\cdot a\cdot c}{4\cdot a^2}\right) = \boxed{\frac{c}{a}}$$

Algunas veces se desea determinar la suma y el producto de las soluciones de una ecuación caudrática, antes que sus soluciones propiamente dichas. De modo que es importante recordar los dos resultados anteriores.

Ya que la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real (puesto que ningún número real elevado al cuadrado es negativo), podría existir alguna preocupación por la cantidad bajo el signo radical : $\left(b^2 - 4\cdot a\cdot c\right)$ que aparece en las soluciones generales. Esta cantidad se llama *discriminante* y determina la naturaleza de las raíces de la ecuación cuadrática , dado que. . .

Si $\left(b^2 - 4\cdot a\cdot c\right) > 0$ *la raíz cuadrada es real y la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.*

Si $\left(b^2 - 4\cdot a\cdot c\right) < 0$ *la raíz cuadrada no es real y las soluciones de la ecuación cuadrática son dos números complejos .*

Si $\left(b^2 - 4\cdot a\cdot c\right) = 0$ *la raíz cuadrada es cero y la ecuación tiene una sola raíz real.*

NOTA : Los números complejos se forman con la suma de un número real y un número imaginario, es decir un número cuyo cuadrado es negativo. Los números complejos z tienen la forma general $z = a + j\cdot b$, donde a es un número real y $j\cdot b$ es un número imaginario, en el cual la constante j es la unidad de los números imaginarios y se define como $j = \sqrt{-1}$.

De éste modo es posible escribir la ráiz cuadrada de cualquier número negativo en función de j . Por ejemplo :

a) $\sqrt{-36} = \sqrt{36\cdot(-1)} = \left(\sqrt{6^2}\right)\cdot\left(\sqrt{-1}\right)$ es decir $\sqrt{-36} = 6\cdot j$

b) $\sqrt{-\left(\frac{18}{16}\right)} = \sqrt{\frac{(-1)\cdot\left(3^2\right)\cdot(2)}{4^2}} = \frac{\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{4^2}}\cdot\sqrt{-1}$ es decir $\sqrt{-\left(\frac{18}{16}\right)} = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot j$

etc.

Ejemplo 1 . Sin resolver las ecuaciones siguientes, determinar cuántas raíces reales tiene cada una Transformar el denominador de las siguientes expresiones a una suma o diferencia de cuadrados.

a) $4\cdot x^2 - 20\cdot x + 25 = 0$ b) $13\cdot x^2 + 7\cdot x + 1 = 0$ c) $5\cdot x^2 = 8\cdot x$

Solución .

a) Comparando ésta ecuación cuadrática con la forma general $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$, se concluye que los coeficientes a , b y c son 4 , -20 y 25 respectivamente, por lo cual su discriminante vale. . .

$$b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-20)^2 - 4\cdot(4)\cdot(25) = 400 - 400 = 0$$

por lo tanto, la ecuación $4\cdot x^2 - 20\cdot x + 25 = 0$ tiene una sola raíz real .

b) En este caso, por comparación con la forma gneneral, ésta ecuación cuadrática tiene los coeficientes $a = 13$, $b = 7$ y $c = 1$ con lo cual su discriminante vale :

$$b^2 - 4\cdot a\cdot c = (7)^2 - 4\cdot(13)\cdot(1) = 49 - 52 = -3$$

que por ser negativo, implica que las raíces de la ecuación son complejas .

c) Escribiendo en la forma geneal la ecuación se obtiene: $5 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 0 = 0$ de donde se deduce que los coeficientes son: $a = 5$, $b = -8$ y $c = 0$ por lo cual su discriminante vale :

$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-8)^2 - 4 \cdot (5) \cdot (0) = 64 - 0 = 64$$

que por ser un número positivo, implica que la ecuación tiene dos raíces reales distintas.

<u>*Ejemplo*</u> 2 . Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas usando la formula general. Si el discriminante es negativo, escribir las raíces complejas en la forma $(a + j \cdot b)$

a) $x^2 + 3 \cdot x = 9$ b) $6 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 5 = 0$ c) $8 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 18 = 0$

<u>*Solución*</u> .

a) Escrita en forma normal, ésta ecuación cuadrática es : $x^2 + 3 \cdot x - 9 = 0$, de donde se deduce que $a = 1$, $b = 3$, $c = -9$ así que:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-3 + \sqrt{(3)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-9)}}{2 \cdot (1)} = \frac{-3 + \sqrt{45}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-3 - \sqrt{(3)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-9)}}{2 \cdot (1)} = \frac{-3 - \sqrt{45}}{2}$$

b) En éste caso se tiene que . . . $a = 6$, $b = -2$, $c = 5$, por lo tanto :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-2) + \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (6) \cdot (5)}}{2 \cdot (6)} = \frac{2 + \sqrt{-(116)}}{12}$$

$$= \frac{2 + 2 \cdot \sqrt{-(29)}}{12} = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6} \cdot \sqrt{29}\right) \cdot j$$

y similarmente $x_2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6} \cdot \sqrt{29}\right) \cdot j$

c) Para simplificar el calculo, factorizemos un 2 de la ecuación inicial para obtener . . .

$$2 \cdot \left(4 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9\right) = 0 \qquad \text{es decir . . .} \qquad 4 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9 = 0$$

y por comparción con la fórma general de una ecuación cuadrática se deduce que : $a = 4$, $b = -12$, $c = 9$., asi que las soluciones son . . .

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-12) + \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot (4) \cdot (9)}}{2 \cdot (4)} = \frac{12 + \sqrt{0}}{8} = \frac{3}{2}$$

y en éste caso la solución es única.

Nótese que cuando el discriminante es un cuadrado perfecto, significa que la ecuación cuadrática inicial se puede factorizar como el producto de dos binomios. Asi, en el último ejemplo anterior queda . . .

$$4\cdot x^2 - 12\cdot x + 9 = (2\cdot x - 3)^2 = 0$$

O también por ejemplo en la ecuación $5\cdot x^2 - 6\cdot x + 1 = 0$, su discriminante es $\sqrt{36 - 4\cdot(5)\cdot(1)} = \sqrt{4^2}$, y en efecto . . . $5\cdot x^2 - 6\cdot x + 1 = (5\cdot x - 1)\cdot(x - 1) = 0$, de donde se obtienen directamente las raices $x = \frac{1}{5}$ y $x = 1$.

Recomendación :

- *Al resolver una ecuación cuadrática , primero trate de factorizarla . Si eso no funciona , entonces use la fórmula general , ¡Ésta siempre funciona!*

Ejemplo 3 . (*Objetos en caída libre*) La fórmula :

$$\boxed{s = s_0 + v_0\cdot t - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2}$$

permite calcular la altura en metros (*respecto a cierto nivel de referencia*), que alcanza un objeto que cae libremente *cerca* de la superficie terrestre bajo la acción de la aceleración gravitacional *constante* $g = 9.81\cdot\frac{m}{seg^2}$, y sin considerar la *fricción* con el aire atmosférico.

En éste fórmula. . .

- s es la altura sobre el nivel de referencia en un tiempo t (medido en segundos)
- s_0 es la altura inicial del objeto (la "altura" que tiene respecto al nivel de referencia en el instante $t = 0$, podría ser positiva o negativa)
- v_0 es la velocidad que tiene el objeto en caida libre en el instante $t = 0$. (podría ser positiva o negativa)

a) Resolver ésta ecuación para t .

b) Si desde lo alto de una cascada de 100 metros de altura se desprende una roca, ¿cuánto tarda la roca en caer al agua.

Si la roca se impulsa inicialmente hacia abajo con una rapidez de $15\cdot\frac{m}{seg}$ ¿cuánto tiempo tardará ahora en su caida libre ?

Solución :

a) Para resolver para t , podemos escribir la ecuación de caida libre como una ecuación cuadrática :

$$\left(\frac{-1}{2}\cdot g\right)\cdot t^2 + (v_o)\cdot t + (s_o - s) = 0 \qquad (*)$$

y por comparación con la forma general $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$ se identifican los coeficientes:

$$a = \left(\frac{-1}{2}\cdot g\right) \quad ; \qquad b = v_o \qquad \text{y} \qquad c = (s_o - s)$$

Por lo tanto, las soluciones generales de la ecuación (*) son . . .

$$t_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} = \frac{-v_o+\sqrt{(v_o)^2-4\cdot\left(\frac{-g}{2}\right)\cdot(s_o-s)}}{2\cdot\left(\frac{-g}{2}\right)} = \boxed{\frac{v_0}{g} - \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2\cdot(s_o-s)}{g}}}$$

y similarmente . . .

$$t_2 = \boxed{\frac{v_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2\cdot(s_o-s)}{g}}}$$

b) La altura inicial es $s_0 = 100\cdot m$ y como la roca simplemente se deja caer, su velocidad inicial v_0 es nula : $v_0 = 0$.

Se desea conocer el tiempo en el que la roca choca con el agua (cuando su altura $s = 0$) , asi que es necesario resolver la ecuación :

$$\left(\frac{-g}{2}\right)\cdot t^2 + (0)\cdot t + (s_0 - 0) = 0 \qquad \text{ó} \qquad \left(\frac{-g}{2}\right)\cdot t^2 + s_0 = 0$$

de donde se obtiene el tiempo de caída. . . $t = \sqrt{\frac{2\cdot(s_0)}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot(100\cdot m)}{9.8\cdot\frac{m}{seg^2}}} = 4.52\cdot seg$

En el caso cuando la roca se lanza hacia abajo, la velocidad inicial es $v_0 = -15\cdot\frac{m}{seg}$ (el signo negativo denota la dirección hacia abajo , dado que una velocidad positiva significa un movimiento hacia arriba) y como la posición inicial de la roca es también $s_0 = 100\cdot m$, para encontrar el tiempo en que cae al agua, se hace nuevamente $s = 0$ y queda:

$$\left(\frac{-g}{2}\right)\cdot t^2 + (v_0)\cdot t + (s_0 - 0) = 0$$

cuya soluciones son :

$$t_1 = \frac{v_0}{g} - \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2\cdot(s_o-s)}{g}} = \frac{-15\cdot\frac{\text{m}}{\text{seg}}}{9.8\cdot\frac{\text{m}}{\text{seg}^2}} - \sqrt{\left(\frac{-15\cdot\frac{\text{m}}{\text{seg}}}{9.8\cdot\frac{\text{m}}{\text{seg}^2}}\right)^2 + \frac{2\cdot(100\cdot\text{m}-0)}{9.8\cdot\frac{\text{m}}{\text{seg}^2}}}$$

es decir . . .

$$t_1 = -1.53\cdot seg - 4.77\cdot seg = -6.3\cdot seg$$

y similarmente. . .

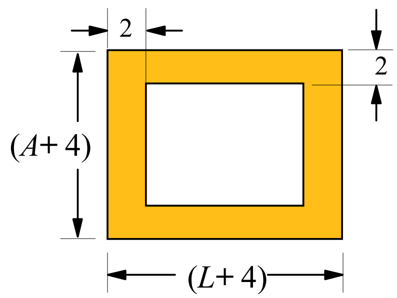
$$t_2 = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2\cdot(s_o - s)}{g}} = -1.53\cdot seg + 4.77\cdot seg = 3.24\cdot seg$$

¿ Cuál de estas dos respuestas es la apropiada ?. Pues bién, puesto que la roca no está en movimiento para tiempos negativos, deducimos que la respuesta correcta es la segunda $3.24\cdot seg$.

Al resolver problemas de aplicación, tenga el hábito de preguntarse a si mismo si su respuesta parece razonable. En el ejemplo anterior, es razonable que la piedra arrojada hacia abajo llegue al agua antes que la roca que solo se deja caer.

<u>*Ejemplo*</u> 4. Un cuadro tiene $3\cdot cm$ más de largo que de ancho y tiene un área de $120\cdot cm^2$. Debe colocarse en una armadura de grueso uniforme de $2\cdot cm$. ¿ Cuales son las dimensiones externas de la armadura ? .

<u>*Solución*</u> : Como se indica en al figura, el largo de la armadura es $L + 4\cdot cm$ y su ancho es $A + 4\cdot cm$ donde L es el largo y A el ancho del cuadro.interior.
Además L es mayor que A en $3\cdot cm$ es decir: $L = A + 3$ por lo tanto, el área S del cuadro es. . .



$$S = L\cdot A = (A + 3\cdot cm)\cdot A = A^2 + (3\cdot cm)\cdot A$$

y queda la ecuación cuadrática:

$$A^2 + (3\cdot cm)\cdot A - S = 0$$

cuya solución es:

$$A = \frac{-(3\cdot cm) + \sqrt{(3\cdot cm)^2 - 4(1)\cdot\left(-120\cdot cm^2\right)}}{2} = (-1.5\cdot cm + 11.057\cdot cm) = 9.56\cdot cm$$

Se ha escogido el valor positivo de A (¿ Tendría sentido real el valor negativo ?)

Las dimensiones de la armadura son entonces : $A + 4\cdot cm$. = $13.56\cdot cm$; $L + 4\cdot cm = 16.56\cdot cm$

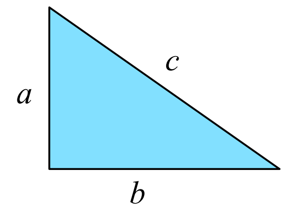
<u>*Ejemplo*</u> 5 . El camino entre dos edificios *A* y *B* tiene forma de L con una distancia total de 403 metros. Si se camina por el pasto en forma diagonal se acorta la distancia a solo 325 metros. ¿Cuáles son las dimensiones de los lados del camino?

<u>*Solución*</u> : En ésta solución, se usará el teorema de Pitágoras : $a^2 + b^2 = c^2$, aplicable a todo triángulo ***rectángulo*** de lados a y b y de hipotenusa c , como se ilustra en la siguiente figura:

Símbolos : a = longitud de un lado del camino

$b = 403 \cdot m - a$ = longitud del otro ladodel camino

$c = 325 \cdot m$ longitud de la diagonal o hipotenusa.



Ecuación : Del teorema de Pitágoras. . .

$$a^2 + (403 - a)^2 = (325)^2$$

$$a^2 + \left(162409 - 806 \cdot a + a^2\right) = 105625$$

se obtiene asi la ecuación cuadrática . . .

$$2 \cdot a^2 - 806 \cdot a + 56784 = 0$$

La solución de ésta ecuación por medio de la fórmula general es . . .

$$a_1 = \frac{806 + \sqrt{(806)^2 - 4 \cdot (2) \cdot (56784)}}{2 \cdot (2)} = \frac{806 + \sqrt{195364}}{4} = \frac{806 + 442}{4} = 312$$

ó

$$a_2 = \frac{806 - \sqrt{(806)^2 - 4 \cdot (2) \cdot (56784)}}{2 \cdot (2)} = \frac{806 - \sqrt{195364}}{4} = \frac{806 - 442}{4} = 91$$

(Ambas soluciones son positivas y tienen sentido real)
Asi que las longitudes buscadas son :

$$\begin{pmatrix} a = 312 \cdot m \\ b = 403 \cdot m - 312 \cdot m = 91 \cdot m \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} a = 91 \cdot m \\ b = 403 \cdot m - 312 \cdot m = 312 \cdot m \end{pmatrix}$$

Nótese que las dos raíces positivas de la ecuación cuadrática nos conducen al mismo resultado

<u>*Ejemplo*</u> 6. Para realizar un viaje, un club de deportistas rentó un autobús en \$ 480 y con el fin de reducir el costo por persona el club invitó a 5 personas más que no eran miembros del club, con lo cual la tarifa de cada quien se redujo en \$ 4.80 . ¿ Cuántos miembros tiene el club ?

<u>*Solución*</u> : En ésta solución, se usará el <u>*modelo*</u>:

$$480 = (\textit{número\_de\_personas}) \times (\textit{costo\_por\_persona})$$

y usemos los <u>*símbolos*</u> . . .

x	para representar el número de miembros del club.
$(x + 5)$	el número de personas en el viaje
$\left(\frac{480}{x}\right)$	el costo inicial por miembro .

$\left(\dfrac{480}{x}\right) - 4.80$ es entonces el costo final del viaje por persona

Del modelo informal se obtiene entonces la ecuación formal:

$$(x+5)\cdot\left(\frac{480}{x} - 4.80\right) = 480$$

ó

$$456.0 - 4.80\cdot x + \frac{2400}{x} = 480$$

y multiplicando por ambos miembros resulta:

$$4.8\cdot x^2 + 24\cdot x - 2400 = 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{24}{5}\cdot x^2 + 24\cdot x - 24\cdot(100) = 0$$

que es posible factorizar directamente como . . .

$$\frac{24}{5}\cdot\left(x^2 + 5\cdot x - 500\right) = 0 \qquad \text{es decir . . .} \qquad \frac{24}{5}\cdot[(x+25)\cdot(x-20)] = 0$$

de donde se obtienen las soluciones: $x = -25$ y $x = 20$.
Como la primera solución no tiene sentido real, la solución correcta es que el club tiene 20 miembros

<u>*Ejemplo*</u> 7 María puede hacer las cortinas de una recámara en 4 horas y 40 minutos menos que Elena, mientras que trabajando las dos juntas pueden hacerlas en 8 horas. ¿Cuánto tiempo requeriría cada joven para hacer las cortinas sola ?.

<u>*Solución*</u> Usemos el modelo o ecuación informal:

$$(tiempo_1)\cdot(razón_1) + (tiempo_2)\cdot(razón_2) = 1$$

y usemos los <u>*símbolos*</u> . . .

$t = 8\cdot horas$	para representar el tiempo total de trabajo
x	para representar el tiempo que tarda María en hacer sola el trabajo
y	para representar el tiempo que tarda Elena en hacer sola el trabajo

Entonces, de las condiciones del problema se deduce que . . .

$$x = \left[y - \left(4 + \frac{2}{3}\right)\cdot horas\right] \quad ; \quad (razón_1) = \frac{1}{x} \quad ; \quad (razón_2) = \frac{1}{y}$$

Substituyendo éstos símbolos en la ecuación informal, se obtiene la ecuación formal :

: $t\cdot\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = 1$ esto es $8\cdot horas\cdot\left[\dfrac{1}{y - \left(4 + \frac{2}{3}\right)\cdot horas} + \dfrac{1}{y}\right] = 1$

omitiendo por el momento las unidades (horas) y simplificando, resulta la ecuación . . .

$$8\cdot\left(\frac{1}{y-\frac{14}{3}}+\frac{1}{y}\right)=1 \qquad \text{ó} \qquad 8\cdot\left(\frac{3}{3\cdot y-14}+\frac{1}{y}\right)=1$$

$$\text{ó} \qquad 8\cdot\left[\frac{3\cdot y+(3\cdot y-14)}{y\cdot(3\cdot y-14)}\right]=1 \qquad \text{ó} \qquad 48\cdot y-112=3\cdot y^2-14\cdot y$$

que se reduce a la ecuación cuadrática . . . $3\cdot y^2-62\cdot y+112=0$, la cual se factoriza directamente como . . .

$$(y-2)\cdot(3\cdot y-56)=0$$

de donde resultan las soluciones : $y=\begin{pmatrix}2\cdot horas\\ \frac{56}{3}\cdot horas\end{pmatrix}$ y dado que la solución $y=2\cdot horas$ no tiene sentido, la solución buscada es. . .

tiempo de Elena para hacer sola el trabajo. $=\frac{56}{3}\cdot horas=18\cdot horas\,,40\cdot minutos$

tiempo de María para hacer sola el trabajo. $=\left(y-\frac{14}{3}\right)=\left(\frac{56}{3}-\frac{14}{3}\right)=14\cdot horas$

<u>*Ejemplo*</u> 8 La capacidad de una alberca es de $300\cdot m^3$ y puede drenarse con una rapidez de $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{m^3}{min}\right)$ mayor que la rapidez con que puede llenarse. Calcúlese la rapidez de drenado si se necesitan 20 minutos más para llenarla que para vaciarla .

<u>*Solución*</u> :

Modelo : $$\mathit{Tiempo}=\frac{\mathit{Volumen}}{\mathit{Velocidad\_de\_flujo}}$$

Símbolos : $V=300\cdot m^3$ el volumen de la alberca

t_1 : tiempo de drenado $\qquad$ v_1 : velocidad de drenado

t_2 : tiempo de llenado $\qquad$ v_2 : velocidad de llenado

es decir. . . $t_1=\frac{V}{v_1}$; $t_2=\frac{V}{v_2}$

De las condiciones del problema se deduce además que . . .

$$t_2=t_1+20\cdot min \qquad ; \qquad v_1=v_2+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{m^3}{min}\right)$$

Por lo tanto, substituyendo t_2 y v_2 , la ecuación $t_2 = \dfrac{V}{v_2}$ queda. . .

$$t_1 + 20 \cdot min = \frac{V}{\left[v_1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{m^3}{min}\right)\right]}$$

pero $t_1 = \dfrac{V}{v_1}$ de acuerdo al modelo, asi que, prescindiendo por el momento de las unidades resulta la ecuación :

$$\frac{V}{v_1} + 20 = \frac{V}{\left(v_1 - \frac{1}{2}\right)} \qquad \text{ó} \qquad \left(v_1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(V + 20 \cdot v_1\right) = V \cdot v_1$$

ó $v_1 \cdot V + 20 \cdot \left(v_1\right)^2 - \dfrac{1}{2} \cdot V - 10 \cdot v_1 = V \cdot v_1$ que equivale a la ecuación cuadrática en v_1 . . .

$$20 \cdot \left(v_1\right)^2 - 10 \cdot v_1 - \frac{300}{2} = 0$$

cuyas solucione son : $v_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{-5}{2} \cdot \dfrac{m^3}{min} \\ 3 \cdot \dfrac{m^3}{min} \end{pmatrix}$, de modo que la velocidad de drenado es $3 \cdot \dfrac{m^3}{min}$ y la de llenado es $2.5 \cdot \dfrac{m^3}{min}$

EJERCICIO 20

I. Determinar cuántas raíces reales tiene cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas .

1. $4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1 = 0$
2. $2 \cdot x^2 - x - 1 = 0$
3. $3 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 1 = 0$
4. $x^2 + 2 \cdot x + 4 = 0$
5. $2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 5 = 0$
6. $3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 3 = 0$
7. $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{6}{5} \cdot x - 8 = 0$
8. $\dfrac{1}{3} \cdot x^2 - 5 \cdot x + 25 = 0$

II. Resolver las ecuaciones cuadráticas . (Escribir las raíces complejas en la forma $a + b \cdot j$)

9. $16 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 3 = 0$
10. $25 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 3 = 0$
11. $x^2 - 2 \cdot x - 2 = 0$

12. $x^2 - 10\cdot x + 22 = 0$ 13. $x^2 + 14\cdot x + 44 = 0$ 14. $x^2 + 6\cdot x - 4 = 0$

15. $x^2 + 8\cdot x - 4 = 0$ 16. $4\cdot x^2 + 4\cdot x - 4 = 0$ 17. $9\cdot x^2 - 12\cdot x - 3 = 0$

18. $x^2 + 3\cdot x - 1 = 0$ 19. $4\cdot x^2 + 4\cdot x - 7 = 0$ 20. $16\cdot x^2 - 40\cdot x + 5 = 0$

21. $49\cdot x^2 - 28\cdot x + 4 = 0$ 22. $9\cdot x^2 + 24\cdot x + 18 = 0$ 23. $25\cdot h^2 + 80\cdot h + 61 = 0$

24. $5\cdot s^2 - 6\cdot s + 3 = 0$ 25. $8\cdot t = 5 + 2\cdot t^2$ 26. $(z+6)^2 = -2\cdot z$

27. $x^2 + a^2 - b^2 = 2\cdot a\cdot x$ 28. $m\cdot x^2 - n\cdot x = m + n$

29. Una compañía calcula que el costo C de producción diario de x unidades de cierto producto está dado por : $C = 800 + 0.04\cdot x + 0.0002\cdot x^2$
Si en cierto día los costos fueron $ 1680, ¿cuántas unidades se produjeron ?

30. Se desea construir una caja cuadrada abierta por arriba, teniendo $108\cdot cm^2$ de material . ¿Cuales deben ser las dimensiones de la base si la altura de la caja es $3\cdot cm$?

31. Se dispone de $200\cdot m$ de alambre para cercar dos corrales adyacentes rectangulares. Hallar sus dimensiones si juntos deben encerrar un área de $1400\cdot m^2$.

32. Encontrar dos números positivos cuya suma sea 100 y cuyo producto sea 2500 .

33. Encontrar dos enteros consecutivos pares cuyo producto sea 288.

34. Hallar un número tal que cuando sea sumado a su reciproco se obtenga el resultado $\frac{26}{5}$.

35. Usar la ecuación de caída libre para encontrar el tiempo en el que un objeto llega al suelo si

a) se lanza hacia arriba desde el piso, con una velocidad de $60\cdot\frac{m}{seg}$

b) se deja caer desde una altura de $64\cdot m$ desde un globo que esta subiendo a $4\cdot\frac{m}{seg}$

36. Un salón rectangular tiene 72 sillas. Si se agregaran 3 sillas más a cada fila, el número de filas podría reducirse en 2 . Encontrar el número de sillas que hay en cada fila.

37. Dos hermanos deben podar un jardín rectangular de 140 por 48 metros y cada uno hará la mitad del trabajo. El primero comienza podando alrededor de la parte externa. ¿Que tan ancha debe ser la banda que pode en cada uno de los 4 lados?. ¿ Cuántas vueltas dará aproximadamente alrededor del jardín si la podadora tiene un ancho de medio metro?

38. Una piloto vuela diariamente a tres ciudades localizadas aproximadamente en los vértices de un triángulo recto isósceles. Ella regresa a la ciudad de la que partió en la mañana. Si la hipotenusa es $239 \cdot km$ encontrar la longitud de los otros lados del triángulo.

39. Dos aviones parten al mismo tiempo del mismo aeropuerto, uno hacia el Sur y el otro hacia el Este. El avión que se dirige hacia el Este, vuela a $23 \cdot \frac{km}{h}$ más rápido que el otro. Después de 3 horas de vuelo continuo a velocidad constante, los aviones están separados $345 \cdot km$.
Hallar las velocidades de cada avión respecto al suelo.

40. Juntas, dos maquinas pueden hacer un trabajo en 8 horas. Pero funcionando solas, la maquina A tarda 4 horas y 40 minutos más que la B en hacer ese trabajo. ¿Cuánto tiempo tarda cada una en hacer el trabajo ?.

41. Un negocio vende 2000 unidades por mes a $\$10$ cada una. Si por cada $\$\ 0.25$ en la reducción de precio puede vender 250 unidades más por mes, ¿ qué precio por unidad dará una venta mensual de $\$\ 36000$?

42. Se desea construir una caja abierta de una pieza de material cuadrada cortando cuadrados de $2 \cdot cm$ de cada esquina y doblando los lados. Si el volumen de la caja debe ser $200 \cdot cm^3$, hallar el tamaño de la pieza original.

43. Repetir el ejercicio anterior si se cortan cuadrados de $4 \cdot cm$ en las esquinas y el volumen es $144 \cdot cm^3$.

44. Se invierten $\$\ 10,000$ por 2 años al $r\%$ de interés compuesto anual. Si al final del periodo la inversión creció a $\$\ 12,321$ hallar r .

45. Sepárese el número 42 en dos partes cuyo producto sea 392.

46. Si el radio de un círculo se incrementa en 4, entonces su área resulta multiplicada por 9 .
Determinar el radio original del círculo .

47. La suma de un número con su recíproco es $\frac{25}{12}$. Hallar dicho número.

48. El área de un triángulo es $42 \cdot m^2$. Hallar su base y su altura si la última excede a a la primera en 5 metros.

49. Una sala rectangular cuya longitud excede en 3 metros a su ancho, necesita $54 \cdot m^2$ de alfombrado ¿Cuáles son las dimensiones de la sala ?

50 . Un granjero inspecciona la cerca de su granja rectangular dando una vuelta alrededor de ella en su automóvil calculando por medio del velocímetro que el perímetro es de $3.5 \cdot km$. Si el área de la granja es de 76 Hectáreas, calcular sus dimensiones . ($1 \cdot Ha = 10,000 \cdot m^2$)

51. Paco recorre $140 \cdot km$ en automóvil hasta una ciudad para recoger un auto nuevo en el cual regresa a su casa. La velocidad en el primer automóvil fué $10 \cdot \frac{km}{h}$ mayor que en el auto nuevo . El ir a la ciudad le tomó 20 minutos menos que el regreso a casa. ¿Cuál fué la velocidad media de cada automóvil ?

52. Un aeroplano vuela $884 \cdot km$, en un viaje de ida y vuelta en línea recta de 6 horas. Si todo el tiempo hubo viento de $20 \cdot \frac{km}{h}$ en la dirección del vuelo, ¿ a qué velocidad vuela el avión en aire sin viento ?

53. Un estudiante se encontraba a $11 \cdot km$ de su escuela donde tendría su examen una hora más tarde. Primeramente caminó $1 \cdot km$ y luego tomó un autobús cuya velocidad media fué $12 \cdot \frac{km}{h}$ mayor que su velocidad a pie . Encuéntrese la velocidad con la que caminó, si llegó a su examen justo a tiempo.

54 . Dos hermanos lavaron las paredes de su cuarto en 3 horas. Calcule el tiempo que requeriría cada uno de ellos para hacer el trabajo, si el más joven necesita 2.5 horas más que su hermano mayor.

55. Una persona calcula que el costo diario del transporte en su automóvil para ir al trabajo es de \$ 12.00, el cual ha dividido en partes iguales entre sus pasajeros y él mismo. Algún tiempo después se unen al grupo dos pasajeros más, lo cual permite reducir en \$ 1.00 el costo del transporte por persona. Calcúle el número de personas que forman el nuevo grupo .

56. El costo de la fiesta anual de un club se divide entre los miembros que asisten. En dos años consecutivos, el costo fué de \$ 500.00 y \$ 570.00 , pero el costo por miembro fué \$ 0.50 menor en el segundo año. Calcúlar el número de miembros que asistieron a cada fiesta, si hubo 10 miembros más en el segundo año.

EJERCICIO 20 *Respuestas (Problemas impares)*

1. dos

3. dos

5. ninguna

7. dos

9. $\left(\frac{1}{4}\right), \left(\frac{-3}{4}\right)$

11. $(1+\sqrt{3}), (1-\sqrt{3})$

13. $(-7+\sqrt{5}), (-7-\sqrt{5})$

15. $(-4+2\cdot\sqrt{5}), (-4-2\cdot\sqrt{5})$

17. $\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right), \left(\frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)$

19. $\left(\frac{-1+2\cdot\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{-1-2\cdot\sqrt{2}}{2}\right)$

21. $\left(\frac{2}{7}\right), \left(\frac{2}{7}\right)$

23. $\left(\frac{-8+\sqrt{3}}{5}\right), \left(\frac{-8-\sqrt{3}}{5}\right)$

25. $\left(\frac{4+\sqrt{6}}{2}\right), \left(\frac{4-\sqrt{6}}{2}\right)$

27. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}), (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

29. $2000 \cdot unidades$

31. $(35 \cdot m) \times (40 \cdot m)$ 33. 16 y 18 35. $2000 \cdot unidades$

37. $10 \cdot m$, $20 \cdot vueltas$ 39. $69 \cdot \dfrac{km}{h}$ y $92 \cdot \dfrac{km}{h}$ 41. \$ 6.00

43. $(20 \cdot cm) \times (20 \cdot cm)$ 45. 14 y 28 47. $\dfrac{4}{3}$

49. $(6 \cdot m) \times (9 \cdot m)$ 51. $60 \cdot \dfrac{km}{h}$ y $70 \cdot \dfrac{km}{h}$ 53. $3 \cdot \dfrac{km}{h}$

55. $6 \cdot personas$

7. 3 <u>Otros tipos de ecuaciones</u>.

Ahora extenderemos las técnicas de solución para incluir ecuaciones que no son lineales o cuadráticas.

7.3 a) Ecuaciones de polinomios .

Uno de los problemas más importantes del álgebra es determinar las raíces de un polinomio $P(x)$, es decir resolver la ecuación $P(x) = 0$; éste no es un problema fácil .
Exponer y desarrollar aqui las herramientas para determinar las raíces de un polinomio, cualquiera que éste sea, es un trabajo extenso. Baste por ahora decir que la factorización puede ser muy últil para resolver éste problema .

<u>Ejemplo</u> 1 . Resolver las siguientes ecuaciones factorizandolas completamente

a) $3 \cdot x^6 - 48 \cdot x^2 = 0$ b) $x^3 - 3 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 9 = 0$

<u>Solución</u> :

a) $\left(3 \cdot x^6 - 48 \cdot x^2\right) = 3 \cdot x^2 \cdot \left(x^4 - 16\right) = 0$ *Factor monomio común*

$$3 \cdot x^2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot \left(x^2 + 4\right) = 0$$ *Diferencia de cuadrados*

Igualando cada factor a cero, se obtiene:

$3 \cdot x^2 = 0$; $x - 2 = 0$; $x + 2 = 0$; $x^2 + 4 = 0$

que generan las raíces :

$x_1 = \sqrt{\dfrac{0}{3}} = 0$; $x = 2$; $x = -2$; $x = \sqrt{-4} = \begin{pmatrix} 2 \cdot j \\ -2 \cdot j \end{pmatrix}$

De ésta manera, la ecuación tiene tres raíces reales y dos raíces imaginarias .

b) La factorización por agrupación funciona bien aquí. . .

$$\left(x^3 - 3\cdot x^2 - 3\cdot x + 9\right) = x^2\cdot(x-3) - 3\cdot(x-3) = (x-3)\cdot\left(x^2-3\right) = 0$$

Igualado factores a cero resulta. . .

$x - 3 = 0$ esto es $x = 3$

$x^2 - 3 = 0$ esto es $x = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Nota : Un error muy común en un problema como la parte a) del ejemplo anterior es eliminar el factor variable x^2, antes de resolver la ecuación . Esto lleva a la perdida de una de las soluciones. Asegúrese de factorizar completamente y entonces igualar ***todos*** los factores a cero

7.4 b) Ecuaciones con radicales o potencias fraccionarias .

Hemos visto que multiplicar ambos lados de una ecuación por una cantidad variable es una valiosa técnica de solución, aunque puede producir una ecuación que no es equivalente a la original y que puede tener *soluciones extrañas* a la ecuación original.
En este caso, se deben verificar las soluciones resultantes en la ecuacion inicial, y no en alguna equivalente que resute de algún paso algebráico intermedio.

Por ejemplo, si x es una solución de la ecuación $a = b$, no necesariamente lo es de $a^n = b^n$.

Asi que para resolver una ecuación que contiene radicales de segundo orden procederemos a :

1. Escribir la ecuación de modo que quede ***un solo radical en uno de sus miembros***.
2. ***Elevar al cuadrado*** ambos miembros de la ecuación para eliminar el radical que quedó solo.
3. Si la ecuación resultante ya no tiene radicales, ***se resuelve para la incógnita***; de lo contrario, se repiten los pasos 1 y 2 ***hasta que hayan desaparecido todos los radicales***.
4. Se substituyen las raíces obtenidas en la ecuación original, para ***descartar las soluciones extrañas*** .

Ejemplo 2 . Hallar todas las soluciones reales de:

a) $\sqrt{1+5\cdot y} + \sqrt{1+y} = 6$ b) $\sqrt{3\cdot x+2} - \sqrt{2\cdot x+1} + 1 = 0$

Solución :

a) Escribamos la ecuación de manera que quede un solo radical en uno de sus miembros

$$\sqrt{1+5\cdot y} = 6 - \sqrt{1+y}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación :

$$\left(\sqrt{1+5\cdot y}\right)^2 = \left(6-\sqrt{1+y}\right)^2$$

$$(1+5\cdot y) = \left[36 - 12\cdot\sqrt{1+y} + (y+1)\right]$$

Reescribiendo la ecuación para que nuevamente quede un solo radical en uno de los miembros . . .

$$\sqrt{1+y} = \frac{37+y-(1+5\cdot y)}{12} = 3-\frac{1}{3}\cdot y$$

Elevando al cuadrado otra vez ambos miembros de la ecuación se obtiene:

$$\left(\sqrt{1+y}\right)^2 = \left(3-\frac{1}{3}\cdot y\right)^2$$

$$1+y = 9-2\cdot y+\frac{1}{9}\cdot y^2$$

que se factoriza como . . .

$$\frac{1}{9}\cdot(y-3)\cdot(y-24) = 0$$

de modo que resultan las raices : $y = 3$; $y = 24$

Substituyendo ahora éstas raíces en la ecuación inicial se tiene :

Para $y = 3$:

$$\sqrt{1+5\cdot(3)}+\sqrt{1+(3)} = 6 \qquad \text{esto es. . .} \quad \sqrt{16}+\sqrt{4} = 6 \quad ; \quad 4+2 = 6$$

Para $y = 24$:

$$\sqrt{1+5\cdot(24)}+\sqrt{1+(24)} = 6 \qquad \text{esto es. . .} \quad \sqrt{121}+\sqrt{25} = 6 \quad ; \quad 11+5 = 6 \ \ ??$$

De modo que $y = 3$ es una solución de la ecuación inicial; pero $y = 24$ es una solución extraña. No es solución de la ecuación inicial sino de una equivalente.

b) Escribamos la ecuación de manera que quede un solo radical en uno de sus miembros

$$\sqrt{3\cdot x+2} = \sqrt{2\cdot x+1}-1$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación :

$$\left(\sqrt{3\cdot x+2}\right)^2 = \left(\sqrt{2\cdot x+1}-1\right)^2$$

$$3\cdot x+2 = 2\cdot x+2-2\cdot\sqrt{2\cdot x+1}$$

Reescribiendo la ecuación para que nuevamente quede un solo radical en uno de los miembros . . .

$$\frac{(3\cdot x+2)-(2\cdot x+2)}{-2} = \left(\frac{-1}{2}\cdot x\right)^2 = \left(\sqrt{2\cdot x+1}\right)^2$$

Elevando al cuadrado otra vez ambos miembros de la ecuación y desarrollando se obtiene:

$$\frac{1}{4}\cdot x^2 = 2\cdot x+1$$

ecuación cuadrática que tiene las raices . . .

$$x = \begin{pmatrix} 4+2\cdot\sqrt{5} \\ 4-2\cdot\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Substituyendo éstas raíces en la ecuación inicial $\sqrt{3\cdot x+2} = \sqrt{2\cdot x+1}-1$ se tiene :

Para $x = 4+2\cdot\sqrt{5}$:

$$\sqrt{14+6\cdot\sqrt{5}} = \sqrt{9+4\cdot\sqrt{5}}-1 \quad \text{esto es. . .} \quad 5.236 = 3.236 \quad ???$$

Para $x = 4-2\cdot\sqrt{5}$:

$$\sqrt{14-6\cdot\sqrt{5}} = \sqrt{9-4\cdot\sqrt{5}}-1 \quad \text{esto es. . .} \quad 0.764 = -0.764$$

De éste modo , ninguna de las soluciones encontradas es solución de la ecuación inicial .

Ejemplo 3 . Hallar todas las soluciones reales de:

a) $\sqrt[4]{\left(x^2-x-4\right)^3} = 8$ b) $3\cdot x^2\cdot\sqrt{2\cdot x-1}+2\cdot x\cdot\sqrt{(2\cdot x-1)^3} = 0$

Solución :

a) En este caso elevamos ambos lados de la ecuación a la potencia reciproca $\frac{4}{3}$ para obtener :

$$\left[\left(x^2-x-4\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{4}{3}} = (8)^{\frac{4}{3}} \qquad \text{esto es} \quad x^2-x-4 = 16$$

y resulta la ecuación cuadrática : $x^2-x-20 = 0$ que se factoriza como . . .

$$(x+4)\cdot(x-5) = 0$$

generando las raices. . . $x = -4$ y $x = 5$

Comprobación :

Para $x = 5$:

$$\left[(5)^2-(5)-4\right]^{\left(\frac{3}{4}\right)} = 8 \qquad \text{esto es. . .} \quad (16)^{\left(\frac{3}{4}\right)} = 8 \quad \text{ó} \quad 2^3 = 8$$

Para $x = -4$:

$$\left[(-4)^2-(-4)-4\right]^{\left(\frac{3}{4}\right)} = 8 \qquad \text{esto es. . .} \quad (16)^{\left(\frac{3}{4}\right)} = 8 \quad \text{ó} \quad 2^3 = 8$$

De éste modo, ambos valores son soluciones de la ecuación inicial .

b) Factorizando por factor común, la ecuación queda :

$$x\cdot\sqrt{2\cdot x-1}\cdot[\,3\cdot x+2\cdot(2\cdot x-1)\,]=0$$

$$x\cdot\sqrt{2\cdot x-1}\cdot(7\cdot x-2)=0$$

Igualando los factores a cero cada factor , se obtienen las posibles raíces :

$$x=0 \quad ; \quad x=\frac{1}{2} \quad ; \quad x=\frac{2}{7}$$

Ratificación de soluciones:

Para $x=0$

$$3\cdot(0)^2\cdot\sqrt{2\cdot(0)-1}+2\cdot(0)\cdot\sqrt{[2\cdot(0)-1]^3}=0 \text{ es decir } 0=0$$

Para $x=\frac{1}{2}$

$$3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\sqrt{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-1}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{\left[2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-1\right]^3}=0 \quad \text{es decir} \quad 0=0$$

Para $x=\frac{2}{7}$

$$3\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^2\cdot\sqrt{2\cdot\left(\frac{2}{7}\right)-1}+2\cdot\left(\frac{2}{7}\right)\cdot\sqrt{\left[2\cdot\left(\frac{2}{7}\right)-1\right]^3}=0$$

$$\text{es decir} \quad \frac{12}{49}\cdot\sqrt{\left(\frac{-3}{7}\right)}+\frac{4}{7}\cdot\sqrt{\left(\frac{-3}{7}\right)^3}=0 \quad ???$$

Y vemos asi que $x=0$ y $x=\frac{2}{7}$ no son soluciones porque no generan números reales, (*aún cuando* $x=0$ *cumpla la ecuación inicial*)

7.5 c) Ecuaciones de tipo cuadrático.

Son las ecuaciones que tienen la forma general :

$$\boxed{a\cdot(u(x))^2+b\cdot(u(x))+c=0}$$

donde $u(x)$ denota *una expresión algebráica* en x . Asi por ejemplo:

a) Si $u(x)=x^2$, la ecuación de cuarto grado $x^4-5\cdot x^2+6=0$ se transforma en al ec. cuadrática. . .

$$\left(x^2\right)^2-5\cdot\left(x^2\right)+6=0 \qquad \text{es decir . . .} \qquad \boxed{u^2-5\cdot u+6=0}$$

b) Si $u(x) = x^3$, la ecuación de sexto grado $x^6 - 2\cdot x^3 + 1 = 0$ se transforma en al ec. cuadrática. . .

$\left(x^3\right)^2 - 2\cdot\left(x^3\right) + 1 = 0$ es decir . . . $\boxed{u^2 - 2\cdot u + 1 = 0}$

c) Si $u(x) = \sqrt[3]{x}$, la ecuación irracional $2\cdot\sqrt[3]{x^2} + 3\cdot\sqrt[3]{x} - 9 = 0$ se transforma en al ec. cuadrática. . .

$\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right) + 1 = 0$ es decir . . . $\boxed{2\cdot u^2 + 3\cdot u - 9 = 0}$

d) Si $u(x) = \sqrt{x}$, la ecuación irracional $\sqrt{x} - 3 + x = 0$ se transforma en al ec. cuadrática. . .

$\left(\sqrt{x}\right) - 3 + \left(\sqrt{x}\right)^2 = 0$ es decir . . . $\boxed{u - 3 + u^2 = 0}$

e) Si $u(x) = 3\cdot x^2 - x$, la ecuación : $2\cdot\left(3\cdot x^2 - x\right)^2 + \left(3\cdot x^2 - x\right) + 4 = 0$ se transforma en al ec. cuadrática. . .

$$\boxed{2\cdot u^2 + u + 4 = 0}$$

<u>*Ejemplo*</u> 1 . Hallar todas las soluciones reales de:

a) $x^4 - 5\cdot x^2 - 2 = 0$ b) $x^6 + 2\cdot x^3 + 1 = 0$

<u>*Solución*</u> :

a) Esta ecuación se transforma a una de tipo cuadrático bajo la substitución $u = x^2$

$$x^4 - 5\cdot x^2 - 2 = \left(x^2\right)^2 - 2\cdot\left(x^2\right) - 2 = 0 \qquad \text{esto es} \qquad u^2 - 5\cdot u - 2 = 0$$

y por la formula cuadrática tenemos:

. . .

$$u_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot(1)\cdot(-2)}}{2\cdot(1)} = \frac{5 + \sqrt{33}}{2}$$

$$u_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot(1)\cdot(-2)}}{2\cdot(1)} = \frac{5 - \sqrt{33}}{2}$$

Y puesto que u_2 es negativo, las únicas posibles raíces reales son:

$$x_1 = \sqrt{u_1} = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{33}}{2}}} \qquad \text{y} \qquad x_1 = -\sqrt{u_1} = \boxed{-\sqrt{\frac{5+\sqrt{33}}{2}}}$$

Una rápida verificación muestra que ambas raíces son soluciones

b) Esta ecuación se transforma a una de tipo cuadrático bajo la substitución $u = x^3$

$$x^6 + 2 \cdot x^3 + 1 = \left(x^3\right)^2 + 2 \cdot \left(x^3\right) + 1 = 0 \qquad \text{esto es} \qquad u^2 + 2 \cdot u + 1 = 0$$

esto es $(u+1)^2 = 0$ y por lo tanto $u + 1 = 0$, de modo que. . .

. . .

$$x^3 + 1 = 0 \quad \text{implica por factorización que} \quad (x+1) \cdot \left(x^2 - x + 1\right) = 0$$

y las raices son. . .

$$(x+1) = 0 \qquad \text{esto es} \qquad \boxed{x = -1}$$

$$\left(x^2 - x + 1\right) = 0 \quad \text{que genera raices complejas} \quad x = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{3} \cdot j}{2} \\ \dfrac{1-\sqrt{3} \cdot j}{2} \end{pmatrix}$$

Asi que sólo $x = -1$ es solución real de la ecuación inicial.

<u>Ejemplo</u> 2. Hallar las soluciones reales de: $2 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 3 \cdot \sqrt[3]{x} - 9 = 0$

<u>Solución</u> :

a) Esta ecuación se transforma a una de tipo cuadrático bajo la substitución $u = \sqrt[3]{x}$ y queda:

$$2 \cdot u^2 + 3 \cdot u - 9 = 0 \qquad \text{esto es} \qquad (u+3) \cdot (2 \cdot u - 3) = 0$$

que tiene las raices . . . $u = -3$ y $u = \dfrac{3}{2}$, esto es . . .

$$\sqrt[3]{x} = -3 \quad \text{y por lo tanto} \quad x = (-3)^3 = \boxed{-27}$$

$$\sqrt[3]{x} = \frac{3}{2} \quad \text{y por lo tanto} \quad x = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \boxed{\frac{27}{8}}$$

<u>Verificación de las soluciones</u> :

Para $x = -27$

$$2 \cdot \left[\sqrt[3]{(-27)^2}\right] + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{-27}\right) - 9 = 0 \quad \text{es decir . . .} \quad 2 \cdot (9) + 3 \cdot (-3) - 9 = 0 \quad \text{(verdadero)}$$

Para $x = \dfrac{27}{8}$

$$2 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^2} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{27}{8}} - 9 = 0 \quad \text{es decir . . .} \quad 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right) + 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - 9 = 0 \quad \text{(verdadero)}$$

Ejemplo 3 . Hallar las soluciones reales de: $2\cdot\left(\frac{x-1}{2\cdot x-3}\right) = 1+3\cdot\left(\frac{2\cdot x-3}{x-1}\right)$

Solución : Esta ecuación es de tipo cuadrático si hacemos la substitución $u = \left(\frac{x-1}{2\cdot x-3}\right)$ pues queda :

$$2\cdot u = 1+3\cdot\left(\frac{1}{u}\right)$$

y se reduce a : $2\cdot u^2 - u - 3 = 0$ multiplicando ambos miembros por u . Sus soluciones son:

$(u+1)\cdot(2\cdot u-3) = 0$ es decir . . . $u = -1$ y $u = \frac{3}{2}$

Por lo tanto :

$\left(\frac{x-1}{2\cdot x-3}\right) = -1$ implica que $x-1 = 3-2\cdot x$ es decir . . . $\boxed{x = \frac{4}{3}}$

$\left(\frac{x-1}{2\cdot x-3}\right) = \frac{3}{2}$ implica que $2\cdot x-2 = 6\cdot x-9$ es decir . . . $\boxed{x = \frac{7}{4}}$

que como se puede comprobar fácilmente, son soluciones de la ecuación inicial.

Ejemplo 4 . Hallar las soluciones reales de: $\left(2\cdot x^2-5\cdot x\right)^2 - 3 = 2\cdot\left(2\cdot x^2-5\cdot x\right)$

Solución : Esta ecuación es de tipo cuadrático bajo la substitución : $u = 2\cdot x^2 - 5\cdot x$, pues queda . . .

$u^2 - 3 = 2\cdot u$ ó $(u+1)\cdot(u-3) = 0$

con soluciones : $u = -1$ y $u = 3$, de modo que los posibles valores reales de la variable x son:

$u = -1$ implica que $2\cdot x^2 - 5\cdot x = -1$ esto es. . . $x = \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{17}}{2} \\ \frac{5-\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}$

$u = 3$ implica que $2\cdot x^2 - 5\cdot x = 3$ esto es. . . $x = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 21

<u>*EJERCICIO*</u> 21 .

I. Resolver las siguientes ecuaciones (reduciendo a la forma cuadrática o factorizando completamente)

1. $4\cdot x^4 - 18\cdot x^2 = 0$
2. $x^4 - 20\cdot x^2 + 64 = 0$
3. $x^3 - 2\cdot x^2 - 3\cdot x = 0$
4. $x^4 + 144 = 40\cdot x^2$
5. $9\cdot x^4 - 24\cdot x^3 + 16\cdot x^2 = 0$
6. $9\cdot x^4 = 37\cdot x^2 - 4$
7. $x^4 + 12 = 7\cdot x^2$
8. $x^4 - x^3 + x - 1 = 0$
9. $36\cdot x^4 - 13\cdot x^2 + 1 = 0$
10. $3\cdot x^{-2} = 4\cdot x^{-1} + 4$
11. $12\cdot x^2 - 27 = x^4$
12. $4\cdot x^4 - 17\cdot x^2 = -18$
13. $8\cdot x^4 + 14\cdot x^2 = 9$
14. $2\cdot \dfrac{1}{x^2} = 6 - 5\cdot \dfrac{1}{x}$
15. $\dfrac{15}{x^2} = 12 + 11\cdot \dfrac{1}{x}$
16. $\dfrac{6}{x^2} = 6 - \dfrac{5}{x}$
17. $5 + \dfrac{33}{x} = \dfrac{14}{x^2}$
18. $27\cdot x^6 + 8 = 35\cdot x^3$
19. $x^6 = -6\cdot x^3 + 27$
20. $x^6 + 216 = 35\cdot x^3$
21. $\left(x^2 + 6\right)^2 - 17\cdot\left(x^2 + 6\right) = -70$
22. $\left(4\cdot x^2 + 3\right)^2 = 11\cdot\left(4\cdot x^2 + 3\right) - 28$
23. $\left(x^2 + x\right)^2 + 72 = 18\cdot\left(x^2 + x\right)$
24. $\left(x^2 + 3\cdot x\right)^2 - 3\cdot\left(x^2 + 3\cdot x\right) = 4$
25. $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 + 4 = 5\cdot\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$
26. $\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2 - 5\cdot\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right) = -6$
27. $\left(\dfrac{2\cdot x-1}{x+2}\right)^2 = 4\cdot\left(\dfrac{2\cdot x-1}{x+2}\right) - 3$
28. $\left(\dfrac{x+3}{1-2\cdot x}\right)^2 + \left(\dfrac{x+3}{1-2\cdot x}\right) = 2$
29. $\left(\dfrac{x+1}{2\cdot x-1}\right) + 2\cdot\left(\dfrac{2\cdot x-1}{x+1}\right) = 3$
30. $2\cdot\left(\dfrac{x-2}{3-x}\right) + \left(\dfrac{3-x}{x-2}\right) = 3$
31. $2\cdot x + 1 - 5\cdot\sqrt{2\cdot x + 1} = -6$
32. $2\cdot x + 6 = 4\cdot\sqrt{2\cdot x + 3}$
33. $3\cdot\left(\dfrac{x-2}{1-x}\right) - 4\cdot\sqrt{\dfrac{x-2}{1-x}} + 1 = 0$

II. Resolver las ecuaciones radicales y verificar sus soluciones

34. $\sqrt{x - 10} - 4 = 0$
35. $\sqrt{3\cdot x + 2} = 3\cdot x$
36. $-\sqrt{26 - 11\cdot x} + 4 = x$

37. $x = \sqrt{11\cdot x - 30}$

38. $\sqrt{4\cdot x + 1} = \sqrt{6\cdot x - 3}$

39. $\sqrt{x + 3} = \sqrt{3\cdot x - 2}$

40. $\sqrt{2\cdot x + 7} = \sqrt{3\cdot x - 2}$

41. $\sqrt{x^2 - 3\cdot x + 5} = \sqrt{2\cdot x - 1}$

42. $\sqrt{x^2 + 4\cdot x + 1} - \sqrt{2\cdot x + 4} = 0$

43. $\sqrt{x^2 + 4\cdot x - 8} = \sqrt{3\cdot x + 12}$

44. $2\cdot x - \sqrt{7\cdot x + 1} = 4$

45. $\sqrt{9\cdot x + 1} - x = 1$

46. $\sqrt{\left(4\cdot x^2 + 2\cdot x + 7\right)} + 4\cdot x = 5$

47. $\sqrt{\left(3\cdot x^2 + 8\cdot x + 1\right)} - 3\cdot x = 1$

48. $\sqrt{3\cdot x + 1} - 2 = \sqrt{2\cdot x - 7}$

49. $\sqrt{5\cdot x + 1} - \sqrt{3\cdot x - 5} = \sqrt{x + 1}$

50. $\sqrt{6\cdot x - 5} - \sqrt{2\cdot x - 1} = \sqrt{2\cdot x - 6}$

51. $\sqrt{9\cdot x + 7} - \sqrt{5\cdot x - 1} = \sqrt{3\cdot x - 2}$

52. $\sqrt{4\cdot x + 5} - \sqrt{3\cdot x + 1} = \sqrt{3\cdot x - 2}$

53. $\sqrt{x^2 + x - 5} - \sqrt{x^2 - 3\cdot x - 1} = 2$

54. $\sqrt{x^2 - 5\cdot x + 2} - \sqrt{x^2 - 6\cdot x + 2} = 1$

55. $\sqrt{2\cdot x^2 - 3\cdot x + 2} + \sqrt{2\cdot x^2 - x + 3} = 1$

56. $\dfrac{\sqrt{(2\cdot x - 3)} - 2}{\sqrt{(3\cdot x - 2)} - 3} = 1$

57. $\dfrac{\sqrt{(4\cdot x + 5)} + 4}{\sqrt{(3\cdot x + 1)} - 1} = 3$

58. $\sqrt{a\cdot x + 2\cdot a^2} = \sqrt{3\cdot a\cdot x + 3\cdot a^2} - a$

59. $\sqrt{3\cdot p\cdot x + p^2} - \sqrt{p\cdot x - p^2} = 2\cdot p$

III. Resolver las ecuaciones con exponentes racionales. Checar las soluciones

60. $\sqrt[3]{\left(x^2 - 5\right)^2} = 16$

61. $\sqrt[3]{\left(x^2 - x - 22\right)^4} = 16$

62. $\dfrac{3}{2}\cdot x\cdot\sqrt{x - 1} + \sqrt{(x - 1)^3} = 0$

63. $\dfrac{4}{3}\cdot x^2\cdot\sqrt[3]{(x - 1)} + 2\cdot x\cdot\sqrt[3]{(x - 1)^4} = 0$

64. $\dfrac{8}{3}\cdot x^2\cdot\sqrt[3]{\left(x^2 - 1\right)} + \sqrt[3]{\left(x^2 - 1\right)^4} = 0$

65. $-5\cdot x^3\cdot\sqrt{(1 - 2\cdot x)^3} + 3\cdot x^2\cdot\sqrt{(1 - 2\cdot x)^5} = 0$

66. $\dfrac{2\cdot x}{3}\cdot\sqrt{2 + 3\cdot x} - \dfrac{4}{27}\cdot\sqrt{(2 + 3\cdot x)^3} = 0$

67. $2\cdot x\cdot\sqrt{2\cdot x - 1} - x^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{(2\cdot x - 1)}} = 0$

68. $\sqrt[3]{(x - 1)} - \dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x - 1)^2}} = 0$

<u>EJERCICIO</u> 21 . Respuestas (Ejercicios impares) .

1. $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2} \\ \frac{-3}{2}\cdot\sqrt{2} \end{pmatrix}$ 3. $x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 5. $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ 7. $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

9. $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$ 11. $x = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ 13. $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ \frac{-1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ \frac{3}{2}\cdot i \\ \frac{-3}{2}\cdot i \end{pmatrix}$ 15. $x = \begin{pmatrix} \frac{-5}{3} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

17. $x = \begin{pmatrix} -7 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ 21. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 23. $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ 25. $x = \frac{4}{3}$

27. $x = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ 29. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 31. $x = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$ 33. $x = \begin{pmatrix} \frac{19}{10} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

35. $x = \frac{2}{3}$ 37. $x = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ 41. $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 43. $x = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

45. $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ 47. $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ 49. $x = 3$ 51. $x = 2$

53. $x = 5$ 55. *no hay solución* 57. $x = 5$ 59. $x = \begin{pmatrix} 5\cdot p \\ p \end{pmatrix}$ 61.

$x = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ 63. $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ 65. $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \\ \frac{3}{11} \end{pmatrix}$ 67. $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

EJERCICIO 19 Respuestas (problemas pares)

2. $\begin{pmatrix} x = 1 \\ x = 9 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} x = 7 \\ x = 7 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} x = \frac{-7}{4} \\ x = \frac{-7}{4} \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} x = 0 \\ x = 3 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} x = \frac{-1}{2} \\ x = 3 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} x = 3 \\ x = 9 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} x = \frac{b}{a} \\ x = -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$ 16. $\begin{pmatrix} x = \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} x = 0 \\ x = \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix} x = -4 \\ x = \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ 22. $\begin{pmatrix} x = 0 \\ x = \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix} x = \frac{-3}{2} \\ x = \frac{-3}{5} \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} x = \frac{-3}{4} \\ x = \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ 28. $\begin{pmatrix} x = \frac{5}{6} \\ x = \frac{7}{6} \end{pmatrix}$ 30 $\begin{pmatrix} x = \frac{-9}{14} \\ x = \frac{7}{4} \end{pmatrix}$ 32. $\begin{pmatrix} x = \frac{-3}{2} \cdot b \\ x = \frac{2}{3} \cdot b \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} x = \frac{-b}{2} \\ x = \frac{b}{a} \end{pmatrix}$ 36. $\begin{pmatrix} x = 12 \\ x = -12 \end{pmatrix}$ 38. $\begin{pmatrix} x = \frac{5}{3} \\ x = \frac{-5}{3} \end{pmatrix}$ 40. $\begin{pmatrix} x = -12 \\ x = 6 \end{pmatrix}$

42. $x = \frac{-9}{2}$ 44. $x = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{-4}{3} \end{pmatrix}$ 46. $\begin{pmatrix} x = \frac{5}{2} \\ x = -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$ 48. $\begin{pmatrix} x = -3 + \sqrt{22} \\ x = -3 - \sqrt{22} \end{pmatrix}$

50. $\begin{pmatrix} x = 0 \\ x = 4 \end{pmatrix}$ 52. $\begin{pmatrix} x = 0 \\ x = 4 \end{pmatrix}$ 54. $\begin{pmatrix} x = -1 \\ x = 5 \end{pmatrix}$ 56. $\begin{pmatrix} x = \frac{-1}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

58. $\begin{pmatrix} x = \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ x = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}$ 60. $\begin{pmatrix} x = \frac{-9}{2} \\ x = \frac{11}{2} \end{pmatrix}$ 62. $\begin{pmatrix} x = \frac{-3}{2} \\ x = \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ 64. $\begin{pmatrix} x = 1 + \frac{\sqrt{11}}{3} \\ x = 1 - \frac{\sqrt{11}}{3} \end{pmatrix}$

66. $\begin{pmatrix} x = \dfrac{5+\sqrt{13}}{6} \\ x = \dfrac{5-\sqrt{13}}{6} \end{pmatrix}$ 68. $\begin{pmatrix} x = 1+\sqrt{6} \\ x = 1-\sqrt{6} \end{pmatrix}$ 70. $\begin{pmatrix} x = 2\cdot a\cdot b \\ x = -a\cdot b \end{pmatrix}$ 72. $\begin{pmatrix} x = -2 \\ x = \dfrac{2\cdot a}{a-b} \end{pmatrix}$

74. $\begin{pmatrix} x = \dfrac{2\cdot a+b}{a} \\ x = \dfrac{-b}{a} \end{pmatrix}$ 76. $\begin{pmatrix} x = \dfrac{-1}{b} \\ x = \dfrac{a+b}{a\cdot b} \end{pmatrix}$ 78. $\begin{pmatrix} x = -2+\sqrt{3} \\ x = -2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$

EJERCICIO 20 *Respuestas (problemas pares)*

2. ***dos*** 4. ***ninguna*** 6. ***dos*** 8. ***ninguna***

10. $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ 12. $x = \begin{pmatrix} 5+\sqrt{3} \\ 5-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ 14. $x = \begin{pmatrix} -3+\sqrt{13} \\ -3-\sqrt{13} \end{pmatrix}$

16. $x = \begin{pmatrix} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ 18. $x = \begin{pmatrix} \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2} \\ \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$ 20. $x = \begin{pmatrix} \dfrac{5+2\cdot\sqrt{5}}{4} \\ \dfrac{5-2\cdot\sqrt{5}}{4} \end{pmatrix}$

22. $x = \begin{pmatrix} \dfrac{-4+\sqrt{2}\cdot j}{3} \\ \dfrac{-4-\sqrt{2}\cdot j}{3} \end{pmatrix}$ 24. $x = \begin{pmatrix} \dfrac{3+\sqrt{6}\cdot j}{5} \\ \dfrac{3-\sqrt{6}\cdot j}{5} \end{pmatrix}$ 26. $x = \begin{pmatrix} -7+\sqrt{13} \\ -7-\sqrt{13} \end{pmatrix}$

28. $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+\dfrac{n}{m} \end{pmatrix}$ 30. $6\cdot cm \times 6\cdot cm$ 32. $50 , 50$ 34. 5 ó $\frac{1}{5}$

36. hay 8 filas de 9 sillas 38. $169\cdot km$ 40. *B* tarda $14\cdot h$ 42. $14\cdot cm \times 14\cdot cm$

44. 11% 46. 2 48. base $7\cdot m$

50. $800\cdot m \times 950\cdot m$ 52. $150\cdot\dfrac{km}{h}$ 54. El mayor $5\cdot h$ 56. 50 personas 1^{a} fiesta

EJERCICIO 21 . *Respuestas (Ejercicios pares)* .

EJERCICIO [illegible] : *Respuestas (Ejercicios pares) :*

2. $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ -2 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1-\sqrt{3}\cdot j}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}\cdot j}{2} \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{73}}{12} \\ \frac{5-\sqrt{73}}{12} \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

18 $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

20 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

32 $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

34. 26

36. $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

38. 2

40. 9

42. $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

44. 5

46. $\frac{1}{2}$

48. $\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$

50. 5

52. 1

54. 7

56. $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

58. $\begin{pmatrix} -a \\ 2\cdot a \end{pmatrix}$

60. $\begin{pmatrix} j\cdot\sqrt{59} \\ -j\cdot\sqrt{59} \\ \sqrt{69} \\ -\sqrt{69} \end{pmatrix}$

62. $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

64. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

66. $\begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

68. 2